TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 9. Juni 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

6. Übung: Die Monte Carlo-Finite Element Methode

Aufgabe 1

Gegeben Sie eine explizite Darstellung der Lösung u des Randwertproblems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\right) = f(x), \qquad u(0) = u_0,\ u(1) = u_1,$$

an. Welche numerische Verfahren könnten Sie nutzen um die Lösung zu berechnen?

Aufgabe 2

Gegeben sein ein Variationsproblem für ein polygonales Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$: Finde $u \in H^1(D)$, so dass

$$\int_D a(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(D), \qquad u|_{\partial D} = g|_{\partial D},$$

mit $a \in L^\infty(\bar{D})$ und $\operatorname{essinf}_{x\in D} a(x) \geq c > 0$, $f \in L^2(D)$ und $g \in C^1(\widetilde{D})$ mit $D \subset \widetilde{D}$.

(a) Zeigen, dass die Lösung u des Variationsproblems linear von f und g abhängt, und dass eben diese Abbildung $\mathcal{L} : (f, g) \mapsto u$, $\mathcal{L} : L^2(D) \times C^1(\widetilde{D}) \to H^1(D)$ beschränkt ist, d.h., zeigen Sie

$$\|u\|^2_{H^1(D)} \leq C\left(\|f\|^2_{L^2(D)} + \|g\|^2_{C^1(\widetilde{D})}\right).$$

(b) Leiten Sie nun ein Variationsproblem für $\mathbf{E}[u]$ her, wobei u eine Zufallsvariable mit Werten in $H^1(D)$ sein soll, die $\mathbf{P}$-fast sicher

$$\int_D a(x)\nabla u(\omega, x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(\omega, x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(D), \qquad u(\omega)|_{\partial D} = g(\omega)|_{\partial D},$$

erfüllt mit a wie oben und f, g als Zufallsvariablen mit Werten in $L^2(D)$ bzw. $C^1(\widetilde{D})$. Es wird angenommen, dass alle Erwartungswerte existieren.

Aufgabe 3

Wir betrachten das gleiche Variationsproblem wie in Aufgabe 2, wobei $D = [0, 1]^2$ und

$$\begin{aligned} a(x, y) &\equiv 1, \\ f(x, y, \omega) &= \exp\left(\xi_1(\omega)\,\sin(\pi(x + y)) + \xi_2(\omega)\,\cos(\pi(x + y))\right), \\ g(x, y, \omega) &= (x - x^2)\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta(\omega)(1 + x + y)\right), \end{aligned}$$

mit $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$, $\eta \sim U(0, 1)$ unabhängig.

(a) Berechnen Sie mittels einer Monte Carlo-FEM Simulation die Mittelwertfelder $\mathbf{E}[f]$, $\mathbf{E}[g]$ und $\mathbf{E}[u]$. Nutzen Sie dazu mindestens $M = 1000$ Samples und ein gleichmäßige Triangularisierung mit Gitterweite von maximal $h = 1/64$.

(b) Finden Sie nun analytische Ausdrücke für $\mathbf{E}[f]$ und $\mathbf{E}[g]$ und berechnen Sie $\mathbf{E}[u]$ direkt durch ein geeignetes deterministisches Variationsproblem.

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe (a).

(c) Es sei nun $f(x,y) \equiv 1$ und $g(x,y) \equiv 0$ deterministisch und

$$a(x,y,\omega) = \exp\left(\xi(\omega)\, \sin(\pi x)\cos(\pi y)\right), \qquad \xi \sim N(0,1).$$

Wiederholen Sie die Simulationen und Berechnungen aus (a) und (b) für diese Koeffizienten. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

Lemma 1. *Es sei $V \subseteq H_0^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ein abgeschlossener Unterraum und $u_V : \Omega \to V$ erfülle* **P***-f.s.*

$$\int_D a(x,\omega)\nabla u_V(x,\omega)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f(x,\omega)\,v(x)\,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in V, \qquad u_V(\omega)|_{\partial D} \equiv 0,$$

wobei **P***-fast sicher*

$$0 < a_{\min}(\omega) \leq a(x,\omega) \leq a_{\max}(\omega), \qquad \text{fast überall in } D,$$

und $f(\omega) \in L^2(D)$. Weiterhin seien die Abbildungen $a : \Omega \to L^\infty(D)$ und $f : \Omega \to L^2(D)$ als meßbar angenommen. Es gilt:

- *Ist* **P***-f.s. $f(\omega) \equiv f_0 \in L^2(D)$, dann folgt aus $1/a_{\min} \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$, $p \geq 1$, auch $u_V \in L^p(\Omega; H_0^1(D))$.*
- *Ist $1/a_{\min} \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ und $\|f(\omega)\|_{L^2(D)} \in L^r(\Omega;\mathbb{R})$ mit $q, r \geq 1$, $1/q + 1/r = 1/p \leq 1$ dann gilt auch $u_V \in L^p(\Omega; H_0^1(D))$.*

Wie kann die Voraussetzung abgeschwächt werden, wenn a und f unabhängig sind? Erfüllen die Probleme aus Aufgabe 1c und Aufgabe 3 die Voraussetzungen?

Aufgabe 5

Der stationäre Grundwasserstand u in einem Gebiet $D = [0,1]^2$ sei durch das Randwertproblem

$$-\nabla\cdot(a\nabla u) = f, \qquad u|_{\partial D} = g,$$

beschrieben. Dabei verhält sich u auf dem Rand ∂D gemäß einem Gefälle von $g(x,y) = 1 + y$. Die hydraulische Leitfähigkeit sei

$$a(x,y) = \exp\left(-1 + 0.5\sin\left(\sqrt{3}\pi x\right)\cos\left(\sqrt{2}\pi y\right)\right),$$

In D wird weiterhin ein Grundwasserabfluss vermutet, dessen genauer Standort aber ebenfalls unbekannt ist. Es sei deshalb

$$f(x,y,\omega) = 1 - \frac{10}{(1+9(x-\eta_1(\omega))^2)(1+9(y-\eta_2(\omega))^2)},$$

mit $\eta_1 \sim U(0.25, 0.75), \eta_2 \sim U(0, 0.5)$ unabhängig. Es ist nun von Interesse, wieviel Grundwasser sich im Gebiet D befindet. Dazu soll der Erwartungswert von

$$Q(\omega) := \int_D u(x,y,\omega)\mathrm{d}(x,y)$$

berechnet werden. Nutzen Sie als räumliche Diskretisierung lineare Dreieckselemente und eine gleichmäßige Triangularisierung.

(a) Finden Sie das deterministische Variationsproblem für den Mittelwert von Q und lösen Sie dieses auf einem Gitter mit $h = 1/128$.

(b) Geben Sie aufbauend auf der Finite Elemente-Theorie Vermutungen für die Abklingraten α, β und γ von

$$\mathbf{E}[Q - Q_{h_\ell}] \propto h_\ell^\alpha, \qquad \mathbf{E}[Q_{h_{\ell+1}} - Q_{h_\ell}] \propto h_\ell^\beta, \qquad \mathrm{Cost}(Q_{h_\ell}) \propto h_\ell^{-\gamma}$$

an. Hier sei wieder $h_\ell = h_0/2^\ell$.

(c) Überprüfen Sie die vermuteten Raten numerisch.