TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 11. Mai 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

5. Übung: Multilevel Monte Carlo

Wir betrachten nachfolgend das dynamische System aus der Vorlesung

$$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1-u_2) \\ u_2(u_1-1) \end{bmatrix} =: f(\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0,$$

wobei

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi} \sim \mathrm{U}[-1,1]^2.$$

Uns interessiert der Erwartungswert von $Q := u_1(T)$. Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems nutzen wir das Euler-Verfahren

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h \cdot f(\boldsymbol{u}_n), \qquad n = 0, 1, \dots$$

für eine Schrittweite $h > 0$. Dieses hat im Übrigen die folgende Fehlerformel

$$|\boldsymbol{u}(nh) - \boldsymbol{u}_n| \le h \, \frac{M}{2L}(\mathrm{e}^{LT} - 1), \qquad M = \max_{t \in [0,T]} \|\boldsymbol{u}''(t)\|,$$

hierbei ist L die Lipschitz-Konstante von f bzgl. $\boldsymbol{u}$.

Aufgabe 1

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche als Argumente $\boldsymbol{u}_0$, T und h entgegen nimmt und eine Matrix ausgibt, in deren Spalten die Iterierten $\boldsymbol{u}_n$, $n = 0, \dots, T/h$, des Euler-Verfahrens angewandt auf das obige dynamische System stehen.

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie ausgehend von der Fehlerformel für das Euler-Verfahren die Raten α, β, γ für

$$\mathbf{E}[Q - Q_{h_\ell}] \propto h_\ell^\alpha, \qquad \mathrm{Var}(Q_{h_\ell} - Q_{h_{\ell-1}}) \propto h_\ell^\beta, \qquad \mathcal{C}(h_\ell) \propto h_\ell^{-\gamma},$$

wobei $h_\ell = 2^{-\ell} h_0$ und $\mathcal{C}(h_\ell)$ die Kosten zur Berechnung von u_h sein sollen.

(b) Bestimmen Sie nun experimentell die obigen Raten α, β, γ. Verwenden Sie dabei mindestens $M = 10^3$ Samples und $h_0 = 2^{-3}$ sowie $l = 0, \dots, 7$. Nutzen Sie als exakten Wert

$$\mathbb{E}[Q] = 1.493005355.$$

Überprüfen Sie dabei auch die übliche Annahme, dass $\mathrm{Var}(Q_h) = \mathrm{const.}$

Aufgabe 3

Führen Sie nun zunächst einige Standard Monte-Carlo-Rechnungen für $h_\ell = 2^{-\ell} h_0$ mit $l = 0, \dots, 7$, $h_0 = 2^{-3}$ durch. Halten Sie dabei den Aufwand der einzelnen MC-Läufe gleich (z.B. bei ca. $3s$). Schätzen Sie den Quadratmittelfehler ab und lassen Sie sich die Konfidenzintervalle grafisch ausgeben. Was beobachten Sie? Erklären Sie ihre Beobachtungen.

Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang die Frage nach einem optimalen h_ℓ für vorgegebene Kosten.

Aufgabe 4

Wie würden Sie asymptotische Konfidenzintervalle für die MLMC-Methode schätzen?

Aufgabe 5

Entwickeln Sie aufbauend auf den Raten α, β, γ einen 2-Level-Monte Carlo-Algorithmus. Führen Sie erneut Rechnungen damit durch. Verwenden Sie als feinstes Level $h_L = 2^{-5}, 2^{-6}, \dots, 2^{-10}$. Jeder MLMC-Durchlauf soll dabei erneut fixe Kosten/fixe Laufzeit von $\mathcal{C} = 3s$ haben. Schätzen Sie auch hier asymptotische Konfidenzintervalle und lassen Sie sich diese grafisch ausgeben.
Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der Single-Level Monte Carlo Simulationen aus Teilaufgabe (c). Was stellen Sie dabei bzgl. der Konfidenzintervalle fest und wieso?