TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 18. Mai 2016
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

4. Übung: Monte Carlo mit Kontrollvariablen

Eine weitere Technik zur Varianzreduktion bei Monte Carlo Simulationen ist die Verwendung von *Kontrollvariablen*:

$$\widetilde{Y}_b := Y - b(Z - \mathbf{E}Z), \qquad b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

welche auf den folgenden Monte Carlo Schätzer

$$\widetilde{\mu}_{N,b} := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \widetilde{Y}_{b,n},$$

mit stochastisch unabhängigen Kopien $\widetilde{Y}_{b,n}$ von $\widetilde{Y}_b$, führen.

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde eine Formel für den optimalen Wert b^* gezeigt. Finden Sie einen Schätzer $B_N = g(Y_1, Z_1, \ldots, Y_N, Z_N)$ für b^* und untersuchen Sie, ob dann

$$\widetilde{\mu}_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} [Y_n - B_N(Z_n - \mathbf{E}Z)]$$

konsistent ist, also

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}_N = \mathbf{E}Y \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Aufgabe 2

Häufig wird nicht der optimale Wert b^* geschätzt, sondern z.B. schlicht $b = 1$ gewählt. Ebenso ist in vielen Anwendungen Y von der Gestalt $Y = f(X)$, wobei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable ist. Als Kontrollvariable bietet sich dann $Z = \widetilde{f}(X)$ an, wobei $\widetilde{f} : D \to \mathbb{R}$ eine Approximation an f ist.

(a) Leiten Sie aus dem Schätzfehler für $b = 1$ eine möglichst gute Wahl der Approximation $\widetilde{f}$ von f ab. (*Hinweis:* Es führt auf eine Bestapproximation in einem bestimmten Hilbertraum.)

(b) Wir betrachten nun als Klasse affine Approximation $\widetilde{f}(X) = aX + c$. Um welchen Faktor verkleinert sich die Schätzvarianz für $\mathbf{E}[Y]$, wenn wir als Kontrollvariable $Z = aX + c$ und $b = 1$ verwenden?
Zeigen Sie, dass in diesem Fall, die L^2-Bestapproximation von f innerhalb der Klasse affiner Funktionen auch die beste Kontrollvariable aus dieser Klasse bzgl. der Schätzvarianz ist.

(c) Sei nun $X \sim \mathrm{U}[0, 1]$ und $f(x) = \exp(x)$ und $f(x) = x(1 - x)$. Um welchen Faktor verkleinert sich die Schätzvarianz, wenn als Kontrollvariable $\widetilde{f}(X)$ mit $\widetilde{f}$ als lineare Interpolation von f an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ sowie $b = 1$ verwendet wird.

Aufgabe 3

Wir wollen π nun mit einem Zufallsexperiment bestimmen. Dazu sei

$$Y := 4 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(U_1^2 + U_2^2),$$

wobei $U_1, U_2 \sim \mathrm{U}[0,1]$ i.i.d. Es gilt $\mathbf{E}[Y] = \pi$. (Warum?)
Ferner betrachten wir folgende Kontrollvariablen

$$Z_c := \mathbf{1}_{[0,c]}(U_1 + U_2), \qquad c \in (0,2).$$

(a) Machen Sie sich grafisch klar, was Y und Z_c simulieren. Und finden Sie einen analytischen Ausdruck für $\mathbf{E}[Z_c]$.

(b) Angenommen, wir verwenden für Z_c den jeweils optimalen Faktor b_c^*. Was ist dann die bestmögliche Wahl c^* von c im Sinne der kleinsten Schätzvarianz bzw. größten Verbesserung dieser gegenüber Standard Monte Carlo? Bestimmen Sie c^* numerisch.

(c) Führen Sie nun eine Monte Carlo Simulation mit der Kontrollvariablen Z_{c^*} mit optimalen $b_{c^*}^*$ durch und vergleichen Sie den Fehler $|\widetilde{\mu}_N - \pi|$ zu dem von Standard Monte Carlo $|\widehat{\mu}_N - \pi|$ mit gleicher Sampleanzahl N.

(d) Wiederholen Sie den Vergleich nun für ein nicht-optimales c und ein nicht-optimales b. Versuchen Sie dabei eine Wahl von b und c zu treffen, die möglichst schlecht ist.

(e) Veranschaulichen Sie nun die Verteilung der Fehler $|\widetilde{\mu}_N - \pi|$ und $|\widehat{\mu}_N - \pi|$ für moderates N, z.B. $N = 1000$ für die Wahlen von c und b aus den beiden vorherigen Teilaufgaben.