TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

22. April 2016

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2016

3. Übung: Die Monte Carlo-Methode und Simulationsmethoden

Aufgabe 1

Wie würden Sie die Cauchy-Verteilung $\mathrm{Cauchy}(0,1)$, welche die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

besitzt, simulieren? Führen Sie Monte Carlo Simulationen zur Berechnung des Erwartungswertes $\mathbf{E}[X]$, $X \sim \mathrm{Cauchy}(0,1)$ aus. Verwenden Sie $M_j = 2^j \cdot 100$ Realisierungen, $j = 0, \ldots, 10$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 2

Entwickeln Sie einen Simulationsalgorithmus für die Gleichverteilung auf dem Einheitssimplex im $\mathbb{R}^n$ basierend auf der Verwerfungsmethode.
Wie verhält sich die Effizienz dieses Algorithmes in Abhängigkeit von n? Betrachten Sie dazu die mittlere Anzahl an Versuchen bis zur Akzeptanz als Funktion von n.

Aufgabe 3

Zur Simulation der Gleichverteilung auf der Einheitsspäre $\mathcal{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen nützlich:

- Für einen n-dimensionalen Zufallsvektor X mit rotationsinvarianter Verteilugnsdichte ist $X/\|X\|$ gleichverteilt auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^{n-1}$
- Ist $X = (X_1, \ldots, X_3)$ gleichverteilt auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}^2$ im $\mathbb{R}^3$, so gilt $X_i \sim \mathrm{Uni}[-1,1]$, $i = 1,2,3$.

Beweise siehe [1, Satz 4.6 & Lemma 4.7]

(a) Wie kann man die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ mit Hilfe der Verwerfungsmethode simulieren?

(b) Wie kann man die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ direkt simulieren?

(c) Jemand schlägt vor mittels der Zufallsgröße $S := X/\|X\|$, wobei

$$X = (2U_1 - 1, 2U_2 - 1, 2U_3 - 1), \quad U_1, U_2, U_3 \sim \mathrm{Uni}[0,1],$$

die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ zu simulieren. Was sagen Sie dazu?

Implementieren Sie alle drei Algorithmen und illustrieren Sie Ihre Antworten mit entsprechenden Grafiken.

Literatur

[1] T. Müller-Gronbach, E. Novak, und K. Ritter, *Monte Carlo Algorithmen*, Springer, Berlin Heidelberg, 2012. (E-Ressource der Bibliothek der TUC).