TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 1. Juli 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

6. Übung: Numerische Berechnung der Karhunen-Loève Entwicklung

Hinweis: Es können auch nur Teilaufgaben (allerdings mindestens 2) vorbereitet und vorgeführt werden.

Aufgabe 1

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $a(x,\omega) : D \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein Zufallsfeld zweiter Ordnung mit Mittelwert 0 und stetiger Kovarianzfunktion $c(x,y) : D^2 \to \mathbb{R}_+$. Die Karhunen-Loève Entwicklung (KLE) von a kann numerisch mit einem Galerkin-Verfahren berechnet werden. Dazu wird die Eigenwertgleichung des Kovarianzoperators C von a mit $v \in V_N$ aus dem endlich-dimensionalen Galerkinraum V_N getestet:

$$\langle C\phi, v\rangle = \lambda\langle \phi, v\rangle \qquad \forall v \in V_N, \tag{1}$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Innenprodukt des entsprechenden Funktionenraumes – hier $L^2(D)$ – bezeichne.

(a) Setzt man für die Eigenfunktionen $\phi \in V_N$ an, so führt (1) auf ein verallgemeinertes lineares Eigenwertproblem für die Basiskoeffizienten u der Eigenfunktion ϕ bzgl. einer Basis $\{v_1,\dots,v_N\}$ von V_N:

$$Au = \lambda M u, \qquad u \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Wie sehen die Komponenten von A und M aus?

(b) Wir möchten nun eine Galerkin-Methode zur Berechnung der KLE eines Zufallsfeldes a auf $D = [0,1]$ in MATLAB implementieren. Dies soll in Form einer Funktion

$$[\Lambda, \Phi] = \texttt{ComputeKL1D}(\texttt{c}, \texttt{N})$$

geschehen, wobei

- $\texttt{N} + 1$ die Größe des Galerkinraumes und `c` ein Funktionshandle für die Kovarianzfunktion c sein soll, welches auch vektorwertige Auswertung von c erlaubt,
- Λ der Spaltenvektor der `N` **abfallenden** Eigenwerte und `Phi` die Matrix der spaltenweisen Basiskoeffizientenvektoren der entsprechenden **normierten** Eigenfunktionen im Galerkinraum sein soll.

Als Galerkinraum V_{N+1} nutzen wir den Raum der stückweise linearen Funktionen für eine gleichmäßige Zerlegung von $D = [0,1]$ in N Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = i/N$, $i = 0,\dots,N$.

Weiterhin wollen wir als Quadraturformel in $D^2 = [0,1]^2$ eine Tensorversion der zusammengesetzten Trapezregel mit den Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^N$ verwenden:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \frac{1}{N^2}\Bigg(&\frac{1}{4}f(0,0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i,0) + \frac{1}{4}f(1,0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} f(1,x_i)\\ &+ \frac{1}{4}f(1,1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i,1) + \frac{1}{4}f(0,1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} f(0,x_i)\\ &+ \sum_{i,j=1}^{N-1} f(x_i,x_j)\Bigg).\end{aligned}$$

Implementieren Sie die Funktion `ComputeKL1D` in MATLAB und testen Sie Ihre Implementierung an $c(x,y) = \min(x,y) - xy$ (siehe vorherige Übung).

Hinweis 1: Die gewählte Quadraturformel ermöglicht ein schnelles, schleifenloses Assemblieren von A in (2).
Hinweis 2: Die Einträge der Massenmatrix M in (2) können im Vorfeld exakt berechnet werden.
Hinweis 3: Nutzen Sie die MATLAB-Routine `eig` zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung.

Aufgabe 2

Wir betrachten nun drei Kovarianzfunktionen $c : [0,1]^2 \to \mathbb{R}_+$ der Matérnfamilie:

$$
\begin{aligned}
c_{1,R}(x,y) &= \exp\left(-\frac{|x-y|}{R}\right), \\
c_{2,R}(x,y) &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}\,|x-y|}{R}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\,|x-y|}{R}\right), \\
c_{3,R}(x,y) &= \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{R}\right).
\end{aligned}
$$

Der Korrelationslängenparameter R sei zunächst $R = 1$.

(a) Erzeugen Sie Realisierungen eines Gaussfeldes G mit Mittelwert 0 und Kovarianzfunktion $c_{1,R}$, $c_{2,R}$ bzw. $c_{3,R}$, $R = 1$.
Generieren Sie dazu Realisierungen von G an den Diskretisierungspunkten $x_i = i/N$, $i = 0, \ldots, 1000$.

(b) Berechnen Sie die KLE der drei Kovarianzfunktionen mittels $\texttt{ComputeKL1D}(\texttt{c}, \texttt{N})$ aus Aufgabe 1 mit $N = 1000$ und vergleichen Sie das Verhalten der Eigenwerte in einem log-log-Plot.

(c) Wiederholen Sie (a) und (b) für $R = 0.1$ und $R = 0.01$. Was beobachten Sie?