TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 25. Juni 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

5. Übung: Zufallsfelder und Karhunen-Loève Entwicklung

Hinweis: Es können auch nur Teilaufgaben (allerdings mindestens 2) vorbereitet und vorgeführt werden.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet sowie H ein separabler Hilbertraum mit Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$.

Aufgabe 1

Sei $a(x, \omega) : D \times \Omega \to D$ ein Zufallsfeld zweiter Ordnung mit

$$m(x) := \mathbf{E}[a(x)], \qquad c(x, y) := \operatorname{Cov}(a(x), a(y)).$$

Wir nehmen weiterhin an, dass $\mathbf{P}$-f.s. $a(\cdot, \omega) \in L^2(D)$ gilt und die Abbildung $a(\cdot, \omega) : \Omega \to L^2(D)$ meßbar sei.

(a) Welche Bedigungen müssen c und m erfüllen, damit $a \in L^2(\Omega; L^2(D))$ gilt – a also eine quadratisch integrierbare $L^2(D)$-wertige Zufallsvariable ist.

(b) Allgemein ist für eine Hilbertraumwertige Zufallsvariable $X \in L^2(\Omega; H)$ die *Kovarianz* $\operatorname{Cov}(X)$ definiert als derjenige *Operator* $C : H \to H$, welcher

$$\langle C\, u, v \rangle = \mathbf{E}\left[\langle X - \mathbf{E}X, u \rangle \langle X - \mathbf{E}X, v \rangle \right] \qquad \forall u, v \in H.$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass der Integraloperator

$$(C\phi)(x) := \int_D c(x, y) \phi(y)\, \mathrm{d}y$$

dem Kovarianzoperator der Hilbertraumwertigen Zufallsvariablen $a \in L^2(\Omega; L^2(D))$ entspricht.

(c) Angenommen, die Realisierungen von a sind $\mathbf{P}$-f.s. stetig differenzierbar mit

$$\operatorname{Cov}(\nabla a(x), \nabla a(y)) = \nabla_x \nabla_y c(x, y) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{Cov}(\nabla a(x), a(y)) = \nabla_x c(x, y),$$

und insbesondere gelte $a \in L^2(\Omega, H^1(D))$. Wie sieht dann der Kovarianzoperator zur $H^1(D)$-wertigen Zufallsvariablen $a(\cdot, \omega) : \Omega \to H^1(D)$ aus?

Aufgabe 2

(a) Es sei $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein beliebiges, vollständiges ONS in H. Unter welchen Bedingungen definiert die zufällige Fourierentwicklung

$$X(\omega) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n(\omega)\, e_n,$$

mit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ als reellwertige, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, wieder eine Zufallsvariable $X \in L^2(\Omega; H)$?

(b) Es sei nun $a(x, \omega) : D \times \Omega \to D$ ein Gausssches Zufallsfeld mit $a \in L^2(\Omega; L^2(D))$ gelte. Weiterhin sei $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges ONS in $L^2(D)$. Dann gilt im Sinne des $L^2(\Omega; L^2(D))$

$$a(x, \omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(\omega)\, \phi_n(x).$$

Geben Sie die gemeinsame Verteilung von $(\xi_n)_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N}$ beliebig, an!

Aufgabe 3

Wir betrachten die Kovarianzfunktion der *Brownschen Brücke* B, eines speziellen Gaussprozesses mit Mittelwert 0 auf $D = [0, 1]$:

$$c(x, y) := \min(x, y) - xy.$$

Erneut bezeichne C den entsprechenden Kovarianzoperator $C\phi(x) := \int_0^1 c(x, y)\phi(y)\,\mathrm{d}y$.

(a) Leiten Sie ein Randwertproblem für die Eigenfunktionen von C her, indem Sie die Eigenwertgleichung zweimal differenzieren.

(b) Lösen Sie das Randwertproblem und bestimmen Sie Eigenwerte und -funktionen von C. Geben Sie schließlich die Karhunen-Loève Entwicklung (KLE) der Brownschen Brücke an.

(c) Erstellen Sie in MATLAB Realisierungen der abgebrochenen KLE B_N von B mit $N = 10, 100, 1000$ Termen.

(d) Schätzen Sie den Abbruchfehler der KLE $\mathbf{E}[\|B - B_N\|^2_{L^2(D)}]$ ab. Wieviel Terme N sind nötig, damit der relative Abbruchfehler in der $L^2(\Omega; L^2(D))$-Norm unter 10% fällt?

(e) Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass C (auf einem geeigneten Teilraum des $L^2(D)$) dem inversen Laplace-Operator $C = \Delta^{-1} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\right)^{-1}$ entspricht. Man kann nun $\Delta^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, über das Eigensystem $(\lambda_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Δ^{-1} definieren:

$$\Delta^{-\alpha}u(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\alpha} \langle u, \phi_n\rangle \phi_n(x), \qquad \langle u, \phi_n\rangle = \int_0^1 u(x)\phi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für welche $\alpha > 0$ ist $\Delta^{-\alpha} : L^2(D) \to L^2(D)$ wieder ein Operator der Spurklasse und somit auch wieder ein Kovarianzoperator?

Wir betrachten für solche α nun wieder Gaussprozesse auf $D = [0, 1]$ mit Mittelwert 0 und Kovarianzoperator $\Delta^{-\alpha}$. Erzeugen Sie in MATLAB erneut Realisierungen der entsprechenden abgebrochenen KLE mit $M = 10, 100, 1000$ Termen für $\alpha = 0.75, 1, 1.5, 2$!

Stellen Sie auch (Nährungen) an die entsprechenden Kovarianzfunktionen in MATLAB grafisch dar!