TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

23. Juni 2014

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

4. Übung: Die Monte Carlo-Finite Element Methode

Hinweis: Es können auch nur Teilaufgaben (allerdings mindestens 2) vorbereitet und vorgeführt werden.

Aufgabe 1

Gegeben sein das Variationsproblem für ein polygonales Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$: finde $u \in H^1(D)$, so dass

$$\int_D a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x = \int_D f(x)\, v(x) \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(D), \qquad u|_{\partial D} = g|_{\partial D},$$

mit $a \in L^\infty(\bar{D})$ und $\operatorname{essinf}_{x \in D} a(x) \geq c > 0$, $f \in L^2(D)$ und $g \in C^1(\widetilde{D})$ mit $D \subset \widetilde{D}$.

(a) Zeigen, dass die Lösung u des Variationsproblems linear von f und g abhängt, und dass eben diese Abbildung $L : (f,g) \mapsto u$, $L : L^2(D) \times C^1(\widetilde{D}) \to H^1(D)$ beschränkt ist, d.h., zeigen Sie

$$\|u\|^2_{H^1(D)} \leq C \left(\|f\|^2_{L^2(D)} + \|g\|^2_{C^1(\widetilde{D})} \right).$$

(b) Leiten Sie nun ein Variationsproblem für $\mathbf{E}[u]$ her, wobei u eine Zufallsvariable mit Werten in $H^1(D)$ sein soll, die $\mathbf{P}$-fast sicher

$$\int_D a(x) \nabla u(\omega, x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x = \int_D f(\omega, x)\, v(x) \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in H_0^1(D), \qquad u(\omega)|_{\partial D} = g(\omega)|_{\partial D},$$

erfüllt mit a wie oben und f, g als Zufallsvariablen mit Werten in $L^2(D)$ bzw. $C^1(\widetilde{D})$. Es wird angenommen, dass alle Erwartungswerte existieren.

(c) Berechnen Sie schließlich mittels der Finite-Element Methode das Mittelwertfeld $\mathbf{E}[u]$, falls $D = [0,1]^2$,

$$\begin{aligned} a(x,y) &\equiv 1, \\ f(x,y,\omega) &= \exp\big(\xi_1(\omega) \, \sin(\pi(x+y)) + \xi_2(\omega) \, \cos(\pi(x+y)) \big), \\ g(x,y,\omega) &= (x - x^2) \, \sin\left(\frac{\pi}{3} \eta(\omega)(1 + x + y) \right), \end{aligned}$$

mit $\xi_1, \xi_2 \sim N(0,1)$, $\eta \sim U(0,1)$ unabhängig. Generieren Sie ebenfalls grafische Darstellungen einiger Realisierungen von u.

Aufgabe 2

Beweisen Sie:

Lemma 1. *Es sei $V \subseteq H_0^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ein abgeschlossener Unterraum und $u_V : \Omega \to V$ erfülle* **P***-f.s.*

$$\int_D a(x,\omega) \nabla u_V(x,\omega) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x = \int_D f(x,\omega)\, v(x) \,\mathrm{d}x \qquad \forall v \in V, \qquad u_V(\omega)|_{\partial D} \equiv 0,$$

wobei **P***-fast sicher*

$$0 < a_{\min}(\omega) \leq a(x,\omega) \leq a_{\max}(\omega), \qquad \text{fast überall in } D,$$

und $f(\omega) \in L^2(D)$. Weiterhin seien die Abbildungen $a : \Omega \to L^\infty(D)$ und $f : \Omega \to L^2(D)$ als meßbar angenommen. Es gilt:

- *Ist* **P***-f.s.* $f(\omega) \equiv f_0 \in L^2(D)$*, dann folgt aus* $1/a_{\min} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}), p \geq 1$*, auch* $u_V \in L^p(\Omega; H_0^1(D))$.
- *Ist* $1/a_{\min} \in L^q(\Omega;\mathbb{R})$ *und* $\|f(\omega)\|_{L^2(D)} \in L^r(\Omega;\mathbb{R})$ *mit* $q, r \geq 1$*,* $1/q + 1/r = 1/p \leq 1$ *dann gilt auch* $u_V \in L^p(\Omega; H_0^1(D))$.

Wie kann die Voraussetzung abgeschwächt werden, wenn a und f unabhängig sind? Erfüllen die Probleme aus Aufgabe 1c und Aufgabe 3 die Voraussetzungen?

Aufgabe 3

Der stationäre Grundwasserstand u in einem Gebiet $D = [0,1]^2$ sei durch das Randwertproblem

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f, \qquad u|_{\partial D} = g,$$

beschrieben. Dabei verhält sich u auf dem Rand ∂D gemäß einem Gefälle von $g(x,y) = y$. Die hydraulische Leitfähigkeit ist nicht genau bekannt und sei durch das Zufallsfeld

$$a(x,y,\omega) = \exp\left(-1 + 0.1\,\xi(\omega)\ \sin\left(\frac{\pi x}{0.5 + \eta_1(\omega)}\right)\ \cos\left(\frac{\pi y}{0.5 + \eta_2(\omega)}\right)\right),$$

mit $\xi \sim N(0,1)$ und $\eta_1, \eta_2 \sim U(0,1)$ unabhängig, modelliert. In D wird weiterhin ein Grundwasserabfluss vermutet, dessen genauer Standort aber ebenfalls unbekannt ist. Es sei deshalb

$$f(x,y,\omega) = \log\left(0.01 + (x - \eta_3(\omega))^2 + (y - \eta_4(\omega))^2\right),$$

mit $\eta_3 \sim U(0.25, 0.75), \eta_4 \sim U(0, 0.5)$ unabhängig. Insgesamt seien alle auftreten Zufallsvariablen als stochastisch unabhängig angenommen. Es ist nun von Interesse, wie tief der Grundwasserstand u in D fällt. Dazu soll der Erwartungswert von

$$Q(\omega) := \operatorname*{essinf}_{(x,y)\in D} u(x,y,\omega)$$

berechnet werden. Nutzen Sie als räumliche Diskretisierung lineare Dreieckselemente und eine gleichmäßige Triangularisierung mit $1 + n$ Gitterpunkten pro Richtung.

(a) Schauen Sie sich zunächst einige Realisierungen von a, f und u für ein Gitter mit $n = 128$ an.

(b) Betrachten Sie die Kosten bzw. hier die Laufzeit $\mathcal{C}_l$ für die Berechnung einer Realisierung von Q_{n_l} mit $n_l = 2^{2+l}$ für $l = 0, \ldots, 7$. Verifizieren Sie, dass $\mathcal{C}_l \propto n_l^\gamma$ mit $\gamma \approx 2$.

(c) Führen Sie nun zunächst einige Standard Monte-Carlo-FEM-Rechnungen für $n_l = 2^{2+l}$, $l = 0, \ldots, 4$ durch. Halten Sie dabei den Aufwand der einzelnen MC-FEM-Läufe gleich bei ca. $\mathcal{C} = 120s$. Schätzen Sie den Quadratmittelfehler ab und lassen Sie sich die Konfidenzintervalle grafisch ausgeben. Was beobachten Sie? Erklären Sie ihre Beobachtungen.

(d) Schätzen Sie nun die Raten α und β

$$\mathbf{E}[Q - Q_{n_l}] \propto n_l^{-\alpha}, \qquad \mathbf{E}[Q_{n_{l+1}} - Q_{n_l}] \propto n_l^{-\beta}.$$

Verwenden Sie dabei $n_l = 2^{2+l}$ mit $l = 0, \ldots, 4$ und mindestens $M = 10000$ Samples für die Monte Carlo Schätzung der Erwartungswerte.

(e) Wie würden Sie asymptotische Konfidenzintervalle für die MLMC-Methode schätzen?

(f) Entwickeln Sie aufbauend auf den Raten α, β, γ einen 2-Level-Monte Carlo-FEM Algorithmus. Führen Sie erneut Rechnungen damit durch, verwenden Sie als feinstes Level $n_L = 2^4, 2^5, 2^6$ und als gröbere Level $n_{L-l} = 2^{-l} n_L$. Jeder MLMC-FEM Durchlauf soll dabei erneut fixe Kosten/fixe Laufzeit von $\mathcal{C} = 120s$ haben.

Schätzen Sie auch hier den Quadratmittelfehler und lassen Sie sich Konfidenzintervalle ausgeben (nutzen Sie die genaueren Varianzschätzungen aus Teilaufgabe d). Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der Single-level Monte Carlo Simulationen.

Hinweis: Nehmen Sie als Nährung an den exakten Wert $\mathbf{E}[Q] \approx -0.143278$ für die Fehlerberechnungen.