TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

23. Mai 2014

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

3. Übung: Die Finite Element Methode

Implementieren Sie in MATLAB einen Finite-Elemente-Code mit linearen Dreieckselementen auf einem gleichmäßigen Dreiecksgitter zur Lösung von

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \text{ in } D, \qquad u|_{\partial D} = g$$

für $D = [0, L] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie dazu eine MATLAB-Funktion

$$[\mathtt{u}, \mathtt{A}, \mathtt{b}] = \mathtt{fem2d\_lin}(\mathtt{L}, \mathtt{H}, \mathtt{nx}, \mathtt{ny}, \mathtt{a}, \mathtt{f}, \mathtt{g})$$

wobei

- `L`, `H` Länge und Höhe des Rechteckgebietes bezeichnen,
- `nx`, `ny` die Anzahl der Gitterpunkte pro x- und y-Richtung seien,
- `a` den Diffusionskoeffizienten angibt, dabei soll `a` als Funktionshandle, als String zur Beschreibung der Funktion $a(x, y)$ und als Vektor für die Werte von a an den Gitterpunkten erlaubt sein,
- `f` den Quellterm bezeichne, mit erlaubten Formaten analog zu `a`,
- `g` ein cell-array mit 4 Komponenten sei, die analog zu `a` und `f` die Randbedingungen an den vier Randsegmenten beinhalten.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie eine Routine `[ptable, eltable] = fem2d_mesh(L, H, nx, ny)`, welche zunächst die Koordinaten der Gitterpunkte in Matrix `ptable` und die globalen Indizes der Knoten jedes Dreieckselementes in die Matrix `eltable` schreibt.

(b) Assemblieren Sie die FE-Steifigkeitsmatrix `A` mittels einer Routine `fem2d_lin_LHS(a, ptable, eltable)` Werten Sie dazu ggf. zuvor `a` an den Quadraturpunkten (= Gitterpunkten, siehe unten) aus.

(c) Assemblieren Sie den Lastvektor bzw. die rechte Seite des FE-Gleichungssystems `b` mittels einer Routine `fem2d_lin_RHS(f, ptable, eltable)`. Werten Sie erneut ggf. zuvor `f` an den Quadraturpunkten (= Gitterpunkten) aus.

(d) Verarbeiten Sie die wesentlichen (hier: Dirichlet-)Randbedingungen, d.h. arbeiten Sie sie in den mit Nullen initialisierten Lösungsvektor `u` ein, datieren Sie damit die rechte Seite auf und streichen Sie letztlich im FE-Gleichungssystem die entsprechenden Freiheitsgrade.

(e) Lösen Sie das reduzierte FE-System mittels dem Backslash-Operator in MATLAB und datieren den Vektor `u` auf.

Verwenden Sie zur Integration auf dem Referenzdreieck $\widehat{K} = \{(x, y) : x, y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$ folgende Quadraturformel

$$\int_{\widehat{T}} \phi(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) \approx \sum_{i=1}^{3} w_i \phi(x_i, y_i), \qquad w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{6}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Diese ist exakt für affine Funktionen.)