TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 6. Mai 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

2. Übung: Die Monte Carlo Methode

Aufgabe 1

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *i.i.d.* Folge reellwertiger Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 und

$$\widehat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \widehat{\mu}_N)^2, \qquad \widehat{\mu}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n.$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\widehat{\sigma}_N^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist, also $\mathbf{E}\left[\widehat{\sigma}_N^2\right] = \sigma^2$ gilt,

(b) $\widehat{\sigma}_N^2 \xrightarrow{\mathbf{P}-f.s.} \sigma^2$ für $N \to \infty$ gilt.

Aufgabe 2

Neben asymptotischen Konfidenzintervallen basierend auf dem Zentralen Grenzwertsatz kann man auch die Tschebyscheff-Ungleichung zur Berechnung von Konfidenzgebieten nutzen:

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}, \qquad X \in L^2(\Omega;\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}.$$

Diese Ungleichung hat den Vorteil, dass sie nicht auf Asymptotiken beruht, sie liefert i. A. aber auch gröbere Intervalle.
Wie würde ein Konfidenzintervall für die Monte Carlo Simulation zum Niveau $1-\alpha$ basierend auf der Tschebyscheff-Ungleichung lauten? Vergleichen Sie es mit dem asymptotischen Konfidenzintervall für $\alpha = 0.1$, 0.05 und 0.01.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mittels Monte Carlo Simulation die durchschnittliche Fläche A_μ eines zufälligen Dreiecks, dessen Eckpunkte einer Gleichverteilung auf dem Einheitsquadrat folgen.

(a) Führen Sie zunächst eine Simulation mit $M = 10^3$ Samples durch und geben Sie ein asymptotisches 95%-Konfidenzintervall an.
Quantifizieren Sie den Fehler zwischen asymptotischer und tatsächlicher Verteilung des Monte Carlo Fehlers mittels der Berry-Esseen-Ungleichung.
Geben Sie ein Konfidenzintervall mittels der Tschebyscheff-Ungleichung an.

(b) Führen Sie nun Monte Carlo Simulationen für $M_j = 2^j\, M_0$, $j = 0,\ldots,10$ und $M_0 = 100$, durch und stellen Sie die entsprechenden, asymptotischen Konfidenzintervalle sowie den exakten Wert $A_\mu = 11/144$ grafisch dar.

(c) Wie könnten Sie ein zufälliges Dreieck simulieren, dessen Eckpunkte einer Gleichverteilung auf dem Einheitskreis folgen?

Hinweis: Nutzen Sie zur Flächenberechnung das Kreuzprodukt (in MATLAB: `cross(x,y)`).

Aufgabe 4

Gegeben sei folgendes Randwertproblem auf $D = [0, 1]$

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \qquad u(0) = u_0, \quad (au'(1)) = F.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung u gegeben ist durch

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{1}{a(y)} \left(F + \int_y^1 f(z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y$$

(b) Berechnen Sie die Mittelwertfunktion $\mu(x) := \mathbf{E}[u(x)]$ falls

$$a(x) \equiv \mathrm{e}^{\kappa},\ \kappa \sim N(0.5, 1), \quad f(x) = Cx,\ C \sim \mathrm{Exp}(1), \quad u_0 \sim \mathrm{Uni}[0, 1], \quad F \sim \mathrm{Uni}[-0.1, 0.1].$$

Dabei seien κ, u_0, F und C stochastisch unabhängig.

(c) Berechnen Sie $\mu(x)$ nun mittels Monte Carlo Simulation in MATLAB. Nutzen Sie dabei eine Diskretisierung mit Schrittweite $\Delta x = 0.01$ und $M = 1000$ Simulationen.
Lassen Sie sich für jeden Diskretisierungspunkt $x_j = j\,\Delta x$, $j = 0, \ldots, 100$, auch das geschätzte asymptotische 95%-Konfidenzintervall grafisch ausgeben und überprüfen Sie, ob ihre analytische Lösung innerhalb des entstehenden Bandes liegt.
Ist dieses Band auch ein Konfidenzgebiet für die Funktion μ bzw. den Vektor $(\mu(x_j))_{j=0,\ldots,100}$?

(d) Wir interessieren uns für das Ereignis $A = \{u(0) \geq u(1)\}$. Berechnen Sie $\mathbf{P}(A)$!
Wieviele Samples M wären nötig, damit die Standardabweichung des Monte Carlo Fehlers zur Berechung von $\mathbf{P}(A)$ kleiner gleich $0.01\mathbf{P}(A)$ ist?

Aufgabe 5

Wie würden Sie die Cauchy-Verteilung $\mathrm{Cauchy}(0, 1)$, welche die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$$

besitzt, simulieren? Führen Sie Monte Carlo Simulationen zur Berechnung des Erwartungswertes $\mathbf{E}[X]$, $X \sim \mathrm{Cauchy}(0, 1)$ aus. Verwenden Sie $M_j = 2^j \cdot 100$ Realisierungen, $j = 0, \ldots, 10$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 6

Entwickeln Sie einen Simulationsalgorithmus für die Gleichverteilung auf dem Einheitssimplex im $\mathbb{R}^n$ basierend auf der Verwerfungsmethode.
Wie verhält sich die Effizienz dieses Algorithmes in Abhängigkeit von n? Betrachten Sie dazu die mittlere Anzahl an Versuchen bis zur Akzeptanz als Funktion von n.

Aufgabe 7

Zur Simulation der Gleichverteilung auf der Einheitsspäre $\mathcal{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen nützlich:

- Für einen n-dimensionalen Zufallsvektor X mit rotationsinvarianter Verteilugnsdichte ist $X/\|X\|$ gleichverteilt auf der Einheitsspähre $\mathcal{S}^{n-1}$
- Ist $X = (X_1, \ldots, X_3)$ gleichverteilt auf der Einheitsspähre $\mathcal{S}^2$ im $\mathbb{R}^3$, so gilt $X_i \sim \mathrm{Uni}[-1, 1]$, $i = 1, 2, 3$.

Beweise siehe [1, Satz 4.6 & Lemma 4.7]

(a) Wie kann man die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ mit Hilfe der Verwerfungsmethode simulieren?

(b) Jemand schlägt vor mittels der Zufallsgröße $S := X/\|X\|$, wobei

$$X = (2U_1 - 1, 2U_2 - 1, 2U_3 - 1), \quad U_1, U_2, U_3 \sim \mathrm{Uni}[0,1],$$

die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}^{n-1}$ zu simulieren. Was sagen Sie dazu?

Implementieren Sie beide Algorithmen und illustrieren Sie Ihre Antworten mit entsprechenden Grafiken.

Literatur

[1] T. MÜLLER-GRONBACH, E. NOVAK, UND K. RITTER, *Monte Carlo Algorithmen*, Springer, Berlin Heidelberg, 2012. (E-Ressource der Bibliothek der TUC).