**TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik** 24. April 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

# Mathematische Methoden der Unsicherheitsquantifizierung

Sommersemester 2014

## 1. Übung: Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie

### Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \mathfrak{E})$ ein messbarer Raum sowie $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (E, \mathfrak{E})$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann $\sigma(X) := \{X^{-1}(B), B \in \mathfrak{E}\} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Sub-$\sigma$-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $\mathbf{P}_X$ mit $\mathbf{P}_X(B) := \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ für alle $B \in \mathfrak{E}$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathfrak{E})$ definiert.

### Aufgabe 2

Geben Sie die Dichtefunktion der Normalverteilung an. Warum nimmt eine normalverteilte Zufallsvariable fast sicher Werte in den irrationalen Zahlen an?

### Aufgabe 3

Es sei $Y$ eine *log-normalverteilte* Zufallgröße, d.h., $\log(Y) \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Leiten Sie die Dichtefunktion von $Y$ her.

(b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y$.
*Hinweis:* Berechnen Sie dazu auf direkte Weise $\mathbf{E}[\exp(X)]$ und $\mathrm{Var}[\exp(X)]$ für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$!

(c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ existiert $\mathbf{E}[\exp(c^2 X^2)]$ für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$?

### Aufgabe 4

Es seien $X, Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R})$. Zeigen Sie

(a) $\mathrm{Var}[X + Y] \le 2\,\mathrm{Var}[X] + 2\,\mathrm{Var}[Y]$

(b) $X, Y$ sind unkorreliert $\iff$ $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$ $\iff$ $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

### Aufgabe 5

Geben Sie die Dichtefunktion der multivariaten Normalverteilung an und nennen Sie ein Beispiel für zwei normalverteilte Zufallsvariablen $X, Y$ an, so dass $(X, Y)^\top$ kein normalverteilter Zufallsvektor ist!
*Hinweis:* Betrachten Sie

$$Y := \begin{cases} -X, & \text{falls } |X| > 1, \\ X, & \text{falls } |X| \le 1. \end{cases}$$

### Aufgabe 6

Ordnen Sie folgende Konvergenzarten in einem Schaubild an und zeichnen Sie für Implikationen Pfeile ein. Falls die Implikation nur unter gewissen Bedinungen gilt, notieren Sie eine Nummer am entsprechenden Pfeil und führen Sie die Bedingungen aus!

Konvergenz in $L^p(\Omega)$, Konvergenz $\mathbf{P}$-fast sicher, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung

**Aufgabe 7**

Für welche Konvergenzarten aus obiger Aufgabe folgt unter welchen Bedingungen die Konvergenz des Erwartungswertes?

**Aufgabe 8**

Es seien $X, X_n \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

(a) Aus $X_n \xrightarrow{L^2} X$ folgt $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ (für $n \to \infty$).

(b) Konvergiert $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}\text{-f.s.}} X$ und gilt $\mathbf{P}$-fast sicher $|X_n| \leq Y$ mit $Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}; \mathbb{R})$, dann folgt $X_n \xrightarrow{L^2} X$.

**Aufgabe 9**

Es sei $X \sim N(0,1)$ und $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ mit $\mu_n \to 0$ und $\sigma_n \to 1$. Zeigen Sie, dass dann $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ folgt und insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\mathbf{P}(X_n \in A) - \mathbf{P}(X \in A)| = 0$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)] \qquad \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ beschränkt und meßbar}$$

gilt.
*Hinweis:* Nutzen Sie den Satz von Riesz.

**Aufgabe 10**

Beweisen Sie das Borel-Cantelli-Lemma (Theorem 0.5 aus der Vorlesung).

**Lemma 1.** *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen und $A := \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty A_n$. Dann gilt:*

*(a) Falls $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(A_n) < \infty$, so folgt $\mathbf{P}(A) = 0$.*

*(b) Sind die $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(A_n) = \infty$, so folgt $\mathbf{P}(A) = 1$.*

**Aufgabe 11**

Beweisen Sie folgende Charakterisierung der $\mathbf{P}$-fast sicheren Konvergenz (Lemma 0.32 aus der Vorlesung).

**Lemma 2.** *Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathbf{P}$-fast sicher genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |X_{n+k} - X_n| > \epsilon\right) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

**Aufgabe 12**

Zeigen Sie, dass für folgende Beispiele reellwertiger Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Lindeberg-Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[X_k^2; |X_k| > \epsilon \Sigma_n\right] = 0 \qquad \forall \epsilon > 0, \qquad \Sigma_n = \sqrt{\operatorname{Var}(X_1) + \ldots + \operatorname{Var}(X_n)},$$

erfüllt ist.

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Sigma_n^2 \to \infty$ und $\mathbf{P}(X_n \leq C) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, für ein $C > 0$.

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i.i.d.* mit $\operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$.

(c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig integrierbar ist und $n \leq C\Sigma_n^2$ für ein $C > 0$ gilt.