**TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik** 1. Juli 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

# Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

9. Übung

## Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung angegebene Quadraturformel zweiter Ordnung tatsächlich von zweiter Ordnung ist, d.h. dass alle Funktionen $p \in \mathcal{P}_2(K)$ exakt über $K$ integriert werden (für ein beliebiges Dreieck $K$).

## Aufgabe 2

(a) Implementieren Sie die Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

in Matlab für $d = 2$. Dabei sollen die Gitter-Daten und die Connectivity-Matrix als Eingabeparameter dienen (siehe Aufgabenteil (b)). Realisieren Sie die Verwendung von $\mathcal{P}_1$- und $\mathcal{P}_2$-Elementen und implementieren Sie die Quadraturformeln von erster und zweiter Ordnung. Gehen Sie bei der Umsetzung wie in der Vorlesung beschrieben vor und gestalten Sie Ihr Programm modular. Lagern Sie insbesondere die Funktion $f$, das Assemblieren, usw. in entsprechende Unterroutinen aus.

(b) Testen Sie Ihre Methode für

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

und die in der Datei `Mesh_1_squareg_Connectivity_P1P2.mat` gegebenen selbsterklärenden Gitter-Daten (Einheitsquadrat) und die beiden gegebenen Connectivity-Matrizen (für $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$). Lösen Sie das Problem mit $\mathcal{P}_1$- und $\mathcal{P}_2$-Elementen mit jeweils beiden Quadraturformeln und plotten Sie die diskreten Lösungen.

## Aufgabe 3

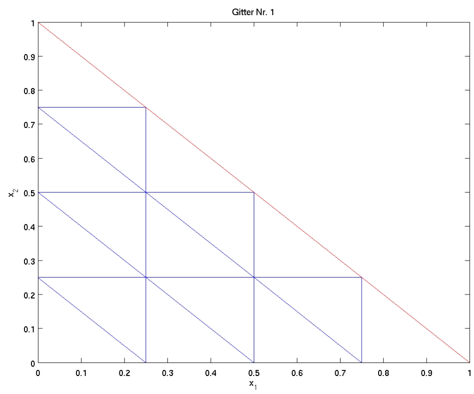
(a) Modifizieren Sie Ihr Programm aus der vorheringen Aufgabe, um Probleme der Bauart

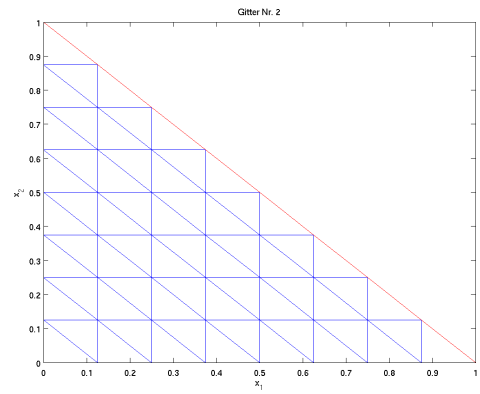
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

lösen zu können. Zur Behandlung der inhomogenen Dirichlet-Randbedingung, soll eine der Vorlesung vorgestellten Möglichkeiten implementiert werden. Welche globalen Freiheitsgrade auf den Kanten liegen (und deren Koordinaten), wird der Methode bereitgestellt (siehe Aufgabenteil (c)).

(b) Implementieren Sie eine Funktion zur Berechnung von $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$. Dabei ist $u_h$ eine Funktion aus $V_h$ (repräsentiert durch einen Vektor) und $u$ eine über ein `function handle` gegebene Funktion. Verwenden Sie dazu eine Quadraturformel der Ordnung $3$.

(c) Lösen Sie die Aufgabe mit $f = 2\,(x_1 + x_2)$ und $g = 1$ auf dem Einheitssimplex. Verwenden Sie dazu die in der Datei `Mesh_5_simplexg_Connectivity_P1P2.mat` gegebenen Gitter-Daten. Es handelt sich dabei um $5$ Gitter, welche durch reguläre, uniforme Verfeinerung auseinander hervorgehen




d.h. $h_i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ für $i = 1, \ldots, 5$. Zu diesem Problem existiert die klassische Lösung $u(x) = \lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 + 1 = (1 - x_1 - x_2)\; x_1\, x_2 + 1$. Schätzen Sie die experimentelle Konvergenzordnung des Fehlers $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ bzgl. $h$ auf diesen Gittern für $\mathcal{P}_1$- und $\mathcal{P}_2$-Elemente.