TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 18. Juni 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

8. Übung

Aufgabe 1

Es seien $\{a_0, \ldots, a_d\} \subset \mathbb{R}^d$ affin unabhängige Punkte, d.h., $\{a_1 - a_0, \ldots, a_d - a_0\}$ sind linear unabhängig. Dann ist ihre konvexe Hülle

$$K := \operatorname{conv}\{a_0, \ldots, a_d\} := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : x = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i\, a_i \;:\; \lambda_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1\Big\}$$

ein **Simplex** mit $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Die Zahlen $(\lambda_0(x), \ldots, \lambda_d(x))$ wie oben heißen die **baryzentrischen Koordinaten** eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$. Sie lassen sich mit Hilfe des LGS

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i\, a_i = x, \qquad \sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_d \\ | & | & & | \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} | \\ x \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnen. Es gilt: $x \in K \Leftrightarrow \lambda(x) \geq 0$. Außerdem ist $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$ und

$$x \in F_i \Leftrightarrow \lambda(x) \geq 0,\ \lambda_i(x) = 0,$$

wobei F_i die Facette ist, die der Ecke a_i gegenüber liegt.

(a) Wie lauten die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes x im Einheitssimplex $\operatorname{conv}\{0, e_1, \ldots, e_d\}$?

(b) Welche Punktmengen sind durch $\lambda_i = \text{const},\ \sum_{j=0}^{d} \lambda_j = 1$ beschrieben?

(c) Vergewissern Sie sich, dass λ eine affine Funktion von x ist. Zeigen Sie anschließend, dass λ die Darstellung

$$\lambda_i : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto \lambda_i(x) = 1 - \frac{(x - a_i) \cdot n_i}{(a_j - a_i) \cdot n_i} \in \mathbb{R} \qquad i = 0, \ldots, d$$

hat. Dabei bezeichnet n_i einen Normalenvektor der Facette F_i und a_j einen beliebigen Eckpunkt der Facette F_i, d.h. $j \neq i$ (λ_i ist unabhängig von der Wahl von j).

Aufgabe 2

Es sei $K = \operatorname{conv}\{a_0, \ldots, a_d\} \subset \mathbb{R}^d$ ein Simplex und $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ die Funktion, welche einen Punkt $x \in K$ auf seine baryzentrischen Koordinaten bzgl. K abbildet. Weiter sei $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine affine Abbildung, d.h. $T(x) = Bx + b$ mit einer regulären Matrix $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\widetilde{K} := T(K) = \operatorname{conv}\{T(a_0), \ldots, T(a_d)\},$$

und $\widetilde{K}$ ist wieder ein Simplex. Zeigen Sie, dass für die baryzentrischen Koordinaten $\widetilde{\lambda}$ bzgl. $\widetilde{K}$ die Beziehung

$$\widetilde{\lambda}(T(x)) = \lambda(x)$$

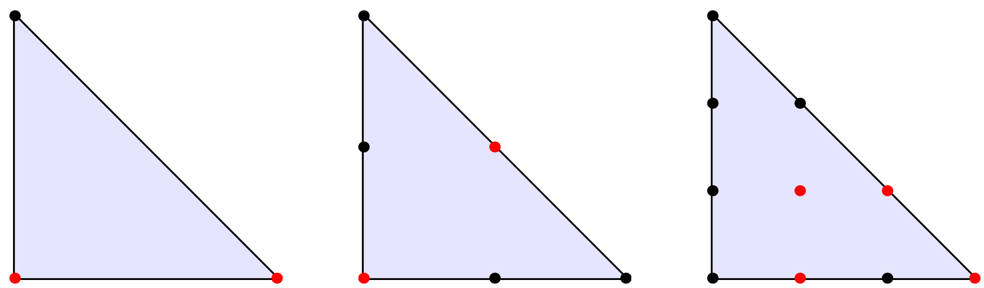
gilt, d.h. baryzentrische Koordinaten sind invariant unter affinen Transformationen.

Aufgabe 3

Zeichnen Sie für die in den folgenden Lagrange-Elementen mit rot markierten Freiheitsgrade die zugehörige Formfunktionen, z.B. in Matlab.

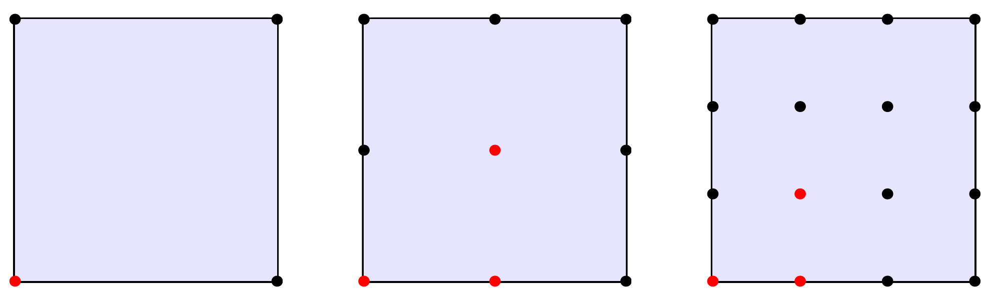
(a) $\mathcal{P}_k$ (vgl. Beispiel 11.5) ($d = 2$)

für $k = 1$ für $k = 2$ für $k = 3$



(b) $\mathcal{Q}_k$ (vgl. Beispiel 11.7) ($d = 2$)

für $k = 1$ für $k = 2$ für $k = 3$



Hinweis: Zum Plotten von Funktionen auf rechteckigen Gebieten ist der Befehl `mesh` geeignet. Im Fall von Dreicksgebieten ist dieser jedoch unpassend. Besser ist es dann, die Funktion als Punktwolke mit dem Befehl `plot3` zu zeichnen oder das Gebiet in viele „kleine“ Dreiecke zu unterteilen und auf diesen die Funktion mit dem Befehl `patch` darzustellen.

Aufgabe 4

Sei V_h wie in Korollar 12.9 (Identifikation von Lagrange-Freiheitsgraden) der FE-Raum zu einer affinen Familie von Lagrange-Elementen $\mathcal{P}_k$ oder $\mathcal{Q}_k$. Drücken Sie die Dimension von V_h für $d = 2, 3$ und $k = 1, 2, 3$ mit Hilfe von N_{cells}, N_{edges}, N_{vertices}, N_{faces} aus.