

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

7. Übung

Aufgabe 1

Lösen Sie die Aufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1 \quad \text{auf } (0, 1), \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

numerisch. Verwenden Sie dazu stückweise lineare Ansatzfunktionen. Überlegen Sie sich zunächst die Einträge in der Steifigkeitsmatrix K und im Lastvektor f . Berechnen Sie die exakte Lösung u_{exakt} und lösen Sie anschließend die diskretisierte Aufgabe mit Matlab und berechnen Sie die Fehler $|u_h - u_{\text{exakt}}|_1$ und $\|u_h - u_{\text{exakt}}\|_{L^2(0,1)}$ für verschiedene Gitterweiten h und schätzen Sie die Konvergenzordnung. Verwenden Sie zur Berechnung der Normen eine hinreichend genaue Integrationsformel (z.B. zusammengesetzte Simpson-Regel).

Aufgabe 2

Analog zu kubischen Hermite-Element in 2D lassen sich Hermitesche Elemente in 1D auf $K = [0, 1]$ mit $P = P_3(K)$ durch

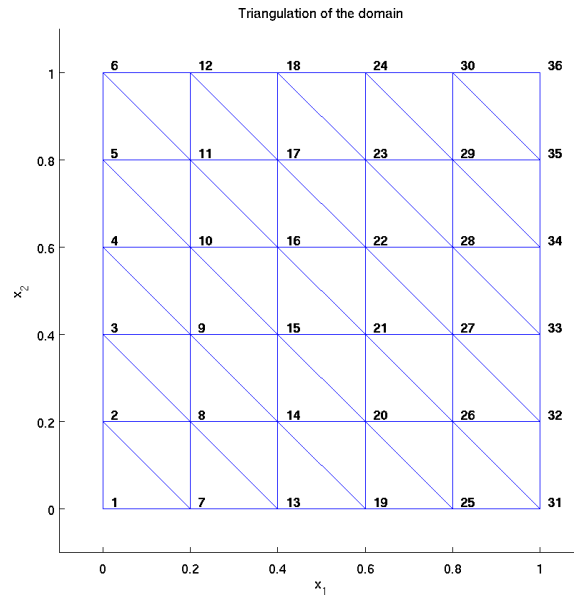
$$\sigma_1(p) = p(0), \quad \sigma_2(p) = p'(0), \quad \sigma_3(p) = p(1), \quad \sigma_4(p) = -p'(1)$$

definieren. Wie lauten die zugehörigen Formfunktionen? Zeichnen Sie diese.

Aufgabe 3

Wir greifen das in Abschnitt 10 vorgestellte Problem auf. Folgende Informationen sind in der Datei `Mesh_and_Stiffness_Matrix_6x6.mat` gespeichert:

- die Matrix `xi`, deren Spalten die Koordinaten der Punkte des Gitters enthalten,



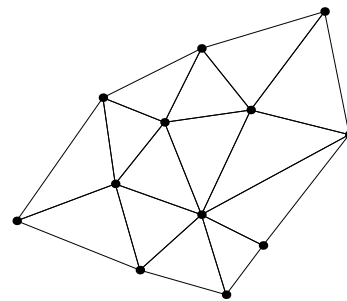
- die Matrix T , welche die Dreiecksstruktur des Gitters enthält,
- die Steifigkeitsmatrix A (für alle 36 Basisfunktionen),
- die Vektoren ix_inner und ix_bnd , welche die Indizes der inneren bzw. Randknoten enthalten.

- (a) Stellen Sie den zu $f = 1$ gehörigen Lastvektor auf und lösen Sie das zu (10.1) gehörende diskrete Problem.
- (b) Plotten Sie die Lösung z.B. unter Verwendung des `patch`-Befehls.

Aufgabe 4

Es sei \mathcal{T} ein konformes Gitter auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, wobei

- N_{cells} die Anzahl der Elemente (Dreiecke),
- N_{edges} die Anzahl der Kanten,
- $N_{vertices}$ die Anzahl der Knoten und
- N_{edges}^∂ die Anzahl der Kanten auf dem Rand



bezeichne.

Finden Sie einen „einfachen“ Zusammenhang (ohne Beweis) zwischen

- (a) N_{cells} , N_{edges} und $N_{vertices}$ sowie
- (b) N_{cells} , N_{edges} und N_{edges}^∂ .