TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 27. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

6. Übung

Aufgabe 1

Um eine eindeutige Lösung für das Poisson-Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen zu erhalten, muss man konstante Funktionen aus dem Lösungsraum „herausnehmen“.

(a) Zeigen Sie, dass sich die natürliche Norm im Quotientenraum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, also

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{w\in[v]} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

durch

$$\|[v]\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \,\mathrm{d}x \right\|_{H^1(\Omega)}$$

ausdrücken lässt. Dabei bezeichnet $[v]$ die zu $v \in H^1(\Omega)$ gehörende Äquivalenzklasse.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der obigen Norm isomorph zu

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v \,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

mit der $H^1(\Omega)$-Norm ist.

(c) Beweisen Sie mit dem Lemma von Lax-Milgram, dass für das Problem mit reinen Neumann-Randbedingungen im Raum V eine eindeutige Lösung existiert, die stetig von den Daten $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Gamma)$ abhängt.

Hinweis: Es gilt die folgende Ungleichung

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le c \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x \right)^2 \right)$$

für alle $u \in H^1(\Omega)$ und eine Konstante c.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 8.12 der Vorlesung (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer elliptischen Aufgabe mit Konvektionsterm).

Hinweise: Zeigen Sie für (a) die Beziehung

$$(\beta \cdot \nabla u,\, u)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\,(u,\, (\nabla \cdot \beta)\, u)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Dabei kann verwendet werden, dass die Formel der partiellen Integration auch für H^1-Funktionen gilt.

Verwenden Sie für Teil (b) die Young'sche Ungleichung in der Form

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$$

mit $\varepsilon = \frac{\mu}{2}$.

Aufgabe 3

Welche Bedingung muss die Bilinearform a im Céa-Lemma erfüllen, damit die dortige Abschätzung mit Konstante 1 gilt (d.h. $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = 1$).