TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 21. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

5. Übung

Aufgabe 1

In welchem Raum $H^m(\Omega)$ (m positiv und ganzzahlig) liegen die folgenden Funktionen?

(a) $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = |x|$

(b) $\Omega = (-1,1)$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x < 0 \\ x^3, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

(c) $\Omega = (0,1)$, $f(x) = x^{-1/4}$

Aufgabe 2

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Zeigen Sie, dass es keine Konstante $c_\tau = c_\tau(\Omega) > 0$ gibt, so dass

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} \leq c_\tau \|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall u \in C(\overline{\Omega}).$$

Konstruieren Sie dazu ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Lemma 8.4 der Vorlesung (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung).

Aufgabe 4

Wie ändern sich die Konstanten in Satz 8.5 der Vorlesung, wenn man anstelle der $H^1(\Omega)$-Norm die auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalente $H^1(\Omega)$-Seminorm wählt?

Aufgabe 5

Beweisen Sie Satz 8.6 der Vorlesung (Schwaches Maximumprinzip) für $f(x) \leq 0$ (fast überall).

Hinweis: Testen Sie die Gleichung mit der Funktion

$$u^+ = \max\{0, u\}.$$

Für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (vgl. Stampacchia-Lemma, Skript Sobolevräume Lemma 5.3).