TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 12. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

4. Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie die diskrete Poincaré-Friedrichs Ungleichung für äquidistante Diskretisierungen quaderförmiger Gebiete im $\mathbb{R}^d$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Behauptung (a) aus Satz 6.1 der Vorlesung.

Aufgabe 3

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **invers monoton** bzw. **M-Matrix**, wenn gilt: $Ax \leq Ay \Rightarrow x \leq y$ (komponentenweise). Zeigen Sie:

(a) Zu einer invers monotonen Matrix A existiert A^{-1} und es gilt $A^{-1} \geq 0$ (elementweise).

(b) Eine invers monotone Matrix A mit $A\mathbf{1} > \mathbf{0}$ erfüllt $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty,\infty} \leq \left\|A^{-1}\mathbf{1}\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_k (A\mathbf{1})_k}$.

Zeigen Sie schließlich, dass es sich bei $A = I + \tau\theta L_h$ (vgl. Beweis zu Satz 6.1) um eine invers monotone Matrix handelt und $\left\|A^{-1}\right\|_{\infty,\infty} \leq 1$ erfüllt ist.
Hinweis: Verfahre ähnlich zum Beweis von Satz 5.7 (diskretes Maximumprinzip).

Aufgabe 4

(a) Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \Delta\, u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Lösen Sie dazu in jedem Zeitschritt die entsprechende elliptische Aufgabe. Bauen Sie Ihre Implementation auf dem Finite-Differenzen-Code zur Lösung des Poissonproblems auf. Schreiben Sie insbesondere eine Funktion, die obiges Problem für die Argumente h, τ, θ sowie f, g, u_0 und T löst. Lassen Sie sich die orts- und zeitdiskrete Lösung ausgeben, sowie die Gitter- und Zeitpunkte der Diskretisierung.

(b) Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung

$$u(x,t) = e^{-8\pi^2 t}\sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)$$

und $T = 0.1$ vorgegeben. Daraus ist $u_0(x) := u(x,0) = \sin(2\pi x_1)\sin(2\pi x_2)$ sowie $f = g = 0$ bestimmt. Stellen Sie den Fehler $\|u(\cdot,t_k) - u_{h,\tau}(\cdot,t_k)\|_{\infty,h}$ im zeitlichen Verlauf für $h = 0.05$ und die mit x gekennzeichneten Kombinationen von θ und τ

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$\tau = h^2$	x	x
$\tau = \frac{1}{2}h^2$	x	x
$\tau = \frac{1}{4}h^2$	x	x

da. Was können Sie feststellen?

(c) Es sei τ_0 der größte mögliche Wert von τ, damit das Crank-Nicolson-Verfahren für alle in der unteren Tabelle mit x gekennzeichneten Kombinationen von h und τ gerade noch die Stabilitätsbedingung erfüllt. Bestimmen Sie τ_0 für $h_0 = 0.2$. Berechnen Sie den Fehler $\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h,\tau}$ für die mit x gekennzeichneten Kombinationen von h und τ jeweils für $\theta = \frac{1}{2}$ und $\theta = 1$. Schätzen Sie die Konvergenzordnungen bzgl. h und τ (u, u_0 und T wie in Aufgabenteil (b)).

	$h = h_0 \cdot 2^0$	$h = h_0 \cdot 2^{-1}$	$h = h_0 \cdot 2^{-2}$	$h = h_0 \cdot 2^{-3}$
$\tau = \tau_0 \cdot 2^0$	x	x	x	x
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-1}$			x	
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-2}$			x	
$\tau = \tau_0 \cdot 2^{-3}$			x	

Aufgabe 5

Schreiben Sie die Gleichungen in (6.2) als ein großes Gleichungssystem. Überlegen Sie sich eine geeignete Sortierung der Unbekannten im Orts-Zeit-Gitter. Machen Sie sich klar, dass die einzelnen Zeitschritte „entkoppeln“ und dass ein Informationstransport nur vorwärts in der Zeit stattfinden kann.
Hinweis: Es soll auf die Matrix L_h zurückgegriffen werden.