TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 24. April 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

3. Übung

Aufgabe 1

Häufig besteht zwischen der Norm des Fehlers $E_h := \|e_h\|$ und dem Diskretisierungsparameter h ein theoretischer Zusammenhang der Form

$$E_h \leq Ch^p.$$

Um experimentell die vorausgesagte Konvergenzordnung p zu überprüfen, macht man den Ansatz

$$E_h \approx Ch^p,$$

wobei C sowie p unbekannt sind.

(a) Wie kann aus zwei Fehlern E_{h_1} und E_{h_2} die numerische (experimentelle) Konvergenzordnung p geschätzt werden?

(b) Die erhaltene Formel lässt sich als Anstieg der Gerade, welche die beiden Punkte (h_1, E_{h_1}) und (h_2, E_{h_2}) in einem doppelt logarithmischen Plot verbindet, interpretieren. Für mehrere Punkte $(h_1, E_{h_1}), \ldots, (h_n, E_{h_n})$ $(n \geq 2)$ kann die Idee entsprechend verallgemeinert werden. Gesucht sind nun die Parameter C und p von einer Funktion Ch^p, welche die Punkte in einem doppelt logarithmischen Plot im Sinne der „kleinsten Quadrate“ am besten approximiert. Wie lautet das entsprechende „Kleinste-Quadrate-Problem“ und die zugehörige Normalengleichung?

(c) Schätzen Sie (wie in Teil (b) beschrieben) die Konstante C und Konvergenzordnung p für die folgenden Messdaten.

h	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
E_h	6.91e-01	1.78e-01	4.33e-02	1.78e-02	3.07e-03

Zeichnen Sie Messdaten und die Funktion Ch^p in einen doppelt-logarithmischen Plot ein.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Gleichung

$$[-\Delta_h^{(5)} u](x) = -\sum_{j=1}^{2} [D_j^- D_j^+ u](x).$$

Gilt auch

$$[-\Delta_h^{(5)} u](x) = -\sum_{j=1}^{2} [D_j^+ D_j^- u](x) \ ?$$

Aufgabe 3

Für Funktionen $v_h, w_h \in V_h$ (bzw. U_h) definiert man

- die **diskrete L^∞-Norm** durch

$$\|v_h\|_{\infty,h} = \max_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|$$

- das **diskrete L^2-Skalarprodukt** durch

$$(v_h, w_h)_h = h^d \sum_{x\in\Omega_h} v_h(x)\, w_h(x)$$

  und die zugehörige **diskrete L^2-Norm** durch

$$\|v_h\|_{0,h}^2 = h^d \sum_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2$$

- die **diskrete H^1-Halbnorm** durch

$$|v_h|_{1,h}^2 = h^d \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x\in\overline{\Omega}_h \\ x+he_j\in\overline{\Omega}_h}} \Big|[D_j^+ v_h](x)\Big|^2$$

Hierbei bezeichnet Ω_h die inneren Gitterpunkte zur Gitterweite h. Implementieren Sie diese vier Funktionen in Matlab für den Fall, dass es sich bei Ω um das Einheitsquadrat ($d = 2$) handelt. Dabei wird der Funktion für die H^1-Seminorm ein Vektor $\boldsymbol{u}_h$ mit

$$\boldsymbol{u}_h = (\underbrace{u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{n,0}}_{\text{0. Zeile}}, \underbrace{u_{0,1}, u_{1,1}, \dots, u_{n,1}}_{\text{1. Zeile}}, \dots, \underbrace{u_{0,n}, u_{1,n}, \dots, u_{n,n}}_{n\text{. Zeile}})^\top$$

übergeben. Für $u_h \in U_h$ ist $u_{i,j}$ der Funktionswert an der Stelle $x_{i,j} = (ih, jh)^\top$. Hingegen wird den anderen Funktionen ein Vektor $\boldsymbol{v}_h$ mit

$$\boldsymbol{v}_h = (v_{1,1}, \dots, v_{n-1,1}, \dots, v_{1,n-1}, \dots, v_{n-1,n-1})^\top$$

übergeben (dem Skalarprodukt werden natürlich zwei solcher Vektoren übergeben).

Implementieren Sie auch eine Funktion `Restrict_to_Inner`, welche die Randkomponenten von $\boldsymbol{u}_h$ abschneidet sowie eine Funktion `Extend_to_Boundary`, welche die fehlenden Randkomponenten von $\boldsymbol{v}_h$ mit 0 auffüllt.

Aufgabe 4

Verifizieren Sie numerisch die quadratische Konsistenzordnung des 5-Punkte-Schemas. Verwenden Sie dafür die Funktion

$$u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$$

auf dem Einheitsquadrat. Bestimmen Sie zunächst

$$f := -\Delta\, u$$

exakt (von Hand oder z.B. mit Maple), und berechnen Sie anschließend den Konsistenzfehler

$$e_h := \Big\|[-\Delta_h^{(5)}\, u] - f_h^{(1)}\Big\|_{\infty,h}$$

für verschieden feine Gitterweiten h. Schreiben Sie dazu eine Funktion, welche den diskreten Laplace-Operator auf eine Gitterfunktion anwendet. Stellen Sie den Zusammenhang von h und e_h in einem doppelt logarithmischen Plot dar, und schätzen Sie die Konvergenzordnung wie in der obigen Aufgabe beschrieben.

Aufgabe 5

Implementieren Sie in Matlab das Finite-Differenzen-Verfahren mit dem 5-Punkte-Stern zur Lösung des Problems

$$\begin{aligned} L\,u := -\Delta\,u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Sie müssen das in der Vorlesung behandelte Verfahren leicht modifizieren, um die inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen behandeln zu können. Addieren Sie dazu die rechte Seite der Systemgleichung geeignet auf und behalten Sie als Systemgröße die Anzahl der inneren Knoten.

(a) Implementieren Sie das FDV für das Poissonproblem auf dem Einheitsquadrat als Funktion mit h sowie f und g als Argumenten. Die beiden letzten sollen als Funktionen bzw. Funktionshandles übergeben werden. Lassen Sie sich den (kompletten) Lösungsvektor u_h sowie die Systemmatrix L_h zurückgeben und bauen Sie eine (optionale) grafische Darstellung der Lösung ein.

(b) Um das Verfahren zu testen, sei die exakte Lösung $u(x) = e^{x_1 \cdot x_2} \cdot \sin(x_1^2)$ vorgegeben. Daraus bestimmt sich $f := -\Delta\,u$ und $g := u|_\Gamma$ entsprechend. Zeichnen Sie den Verlauf der Fehler $e_{\infty,h} := \|u - u_h\|_{\infty,h}$, $e_{0,h} := \|u - u_h\|_{0,h}$ und $e_{1',h} := |u - u_h|_{1,h}$ sowie die Kondition der Systemmatrix (bzgl. der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$) in Abhängigkeit von h in doppelt logarithmische Plots ein. Bestimmen Sie auch die experimentelle Konvergenzordnung.

Hinweise:

- Verwenden Sie `sparse` Matrizen (`help sparse`). Weitere nützliche Befehle sind `speye`, `spdiags` und `kron`.
- Gliedern Sie Ihre FDV-Funktion in Abschnitte, z.B. in Knoten erzeugen, Systemmatrix und rechte Seite erstellen, Randbedingungen einbauen, lösen.
- Nutzen Sie die Routinen aus den vorherigen Aufgaben aus.
- Mit dem Aufruf `eigs(Lh,1)` kann der größte Eigenwert und mit `eigs(L,1,'SM')` der kleinste Eigenwert einer Matrix `L` bestimmt werden.
- Eine Schätzung der Konditionszahl (bezüglich der 1-Norm) für `sparse` Matrizen erhält man mit `condest`.