TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 17. April 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

2. Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Charakteristiken der folgenden partiellen Differentialgleichungen

(a) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$,

(b) $u_{xx} - 4y\, u_{xy} + 4y^2\; u_{yy} + 3\, u_x + 3\, u_y - 12\, u = 0$

Aufgabe 2

Beweisen Sie Korollar 3.8 der Vorlesung.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator Δ für eine Funktion $u = (r,\, \varphi)$ in Polarkoordinaten $(r,\, \varphi) \in (0,\, \infty) \times [0,\, 2\pi)$ die Form

$$\Delta\, u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

hat.

(b) Für ein $\omega \in (0, 2\pi]$ sei $\Omega := \{(r,\, \varphi) : 0 < r < 1,\; \varphi \in (0,\, \omega)\}$ der zugehörige Sektor des Einheitskreises in der Ebene. Zeigen Sie, dass die auf Ω definierte Funktion

$$u(r,\, \varphi) := r^{\pi/\omega}\, \sin\left(\frac{\varphi\, \pi}{\omega} \right)$$

Lösung der PDE

$$\begin{aligned} -\Delta\, u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u(r,\, 0) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1 \\ u(r,\, \omega) &= 0 && \text{für } 0 \le r \le 1 \\ u(1,\, \varphi) &= \sin\left(\frac{\varphi\, \pi}{\omega} \right) && \text{für } 0 \le \varphi \le \omega \end{aligned}$$

ist und dass sich die ersten Ableitungen von u nach r für $\omega > \pi$ nicht stetig auf den Rand von Ω fortsetzen lässt, d.h. $u \notin C^1(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für die instationäre Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \times (0,T), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}, \end{aligned}$$

die Wärmeenergie $Q(t) = \int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x$ konstant über die Zeit ist.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichungen jeweils mit einer geeigneten Funktion und integrieren Sie partiell.