**TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik**
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

10. April 2015

# Numerik partieller Differentialgleichungen

Sommersemester 2015

1. Übung

## Aufgabe 1

Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

(a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0,$

(b) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u + \partial_y u = 0,$

(c) $\partial_x^2 u + \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0.$

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Klassifikation von linearen PDEs zweiter Ordnung (Defintion 2.2) invariant gegenüber Koordinatentransformationen $y = F(x)$ ist.

## Aufgabe 3

(a) Leiten Sie die Gleichung für die schwingende Saite, also die eindimensionale Wellengleichung,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1}$$

her und führen Sie diese in die normierte Form ($c = 1$) über.

*Hinweis:* Betrachten Sie zur Herleitung ein kleines, gekrümmtes Saitenstück $[x, x + \Delta x]$, an dessen Enden jeweils eine tangential wirkende Spannkraft vom Betrag $T$ anliegt. Berechnen Sie die wirkende vertikale Kraft und wenden Sie das 2. Newtonsche Gesetz an. Gehen Sie dabei davon aus, dass die horizontal wirkende Kraft nahe bei Null ist und vernachlässigen Sie Schwerkraft und Reibung.

(b) Wie müssen Sie obige Herleitung modifizieren um die Gleichung

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$$

für eine erregte, schwingende Seite zu erhalten?

(c) Nutzen Sie die Transformation $\xi = x + t, \eta = x - t$ um zu zeigen, dass die Lösung von (1) die Form

$$u(x,t) = g(x+t) + h(x-t)$$

haben muss.