Numerik partieller Differentialgleichungen

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Inhalt I

Teil II

Finite-Differenzen-Verfahren

Inhalt

Literatur: [Grossmann et al., 2007] Kapitel 2.1, 2.4 und 2.5].

Wir beschränken uns zunächst auf das Modellproblem

$$\begin{aligned} L\,u := -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{5.1}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Wir überdecken $\overline{\Omega}$ mit einem

$$x_{i,j} = (i\,h, j\,h)^\top \in \mathbb{R}^2$$

regelmäßigen (äquidistanten) und kartesischen Punktgitter mit der **Gitterweite** h =
der $(n+1)^2$ Gitterpunkte
Diese zerfallen in

$$\Omega_h := \overline{\Omega}_h \cap \Omega \quad (n-1$$

$$\Gamma_h := \overline{\Omega}_h \cap \Gamma \quad 4\,n \text{ Ra}$$

Idee aller Finite-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren):

- Approximiere die Lösung u der PDE durch eine Gitterfunktion u_h, die nur in den Gitterpunkten $\overline{\Omega}_h$ definiert ist.
- Ersetze an den Gitterpunkten alle Ableitungen von u in der PDE durch Differenzenquotienten; ersetze also den Differentialoperator L durch einen **Differenzenoperator** L_h.

Wir suchen also eine diskrete Lösung (Gitterfunktion)

$$u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R},$$

die eine diskretisierte Gleichung

$$\begin{aligned} [L_h\, u_h](x) &= f_h(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_h \quad \text{(innere Gitterpunkte)} \\ u_h(x) &= 0 \qquad\quad \text{für alle } x \in \Gamma_h \quad \text{(Randpunkte)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

erfüllt, wobei die Differenzenoperatoren L_h und f_h noch zu definieren sind.

Wir interessieren uns im Verlauf der Vorlesung dafür, ob und wie schnell (mit welcher Ordnung bzgl. h) die Lösungen der diskreten Aufgabe gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems konvergieren. Zu diesem Zweck führen wir folgende Räume ein:

$$U_h := \{u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}\} \qquad \text{Gitterfunktionen}$$
$$U_h^0 := \{u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R},\ u_h(x) = 0 \text{ auf } \Gamma_h\} \qquad \text{Gitterfunktionen mit Null-Randwerten}$$
$$V_h := \{u_h : \Omega_h \to \mathbb{R}\} \qquad \text{Gitterfunktionen im Inneren}$$

Es gilt
$$\dim U_h = (n+1)^2 \quad \text{und} \quad \dim U_h^0 = \dim V_h = (n-1)^2.$$

Letztere können als Unterräume von U_h aufgefasst werden.
Der Differenzenoperator L_h bildet U_h (oder U_h^0) nach V_h ab.[8] Diese Räume werden je nach Kontext mit einer geeigneten Norm ausgestattet.

[8] Damit ist dieses L_h hier durch eine rechteckige Matrix $L_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n+1)^2}$ bzw. eine quadratische Matrix $L_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^2 \times (n-1)^2}$ repräsentiert.

Inhalt

Im Folgenden bezeichne u die (eindeutige) klassische Lösung von (5.1) mit rechter Seite $f \in C(\Omega)$. „Konsistenz“ bezieht sich immer auf das Einsetzen der exakten Lösung in ein diskretes Schema.

Definition 5.1 (Konsistenz und Konsistenzordnung)

Es sei $f_h \in V_h$ und $\|\cdot\|_{\cdot,h}$ eine Norm auf V_h.

(a) Das Schema (5.2) heißt **konsistent** (mit der Aufgabe (5.1)) bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\cdot,h}$, wenn gilt:[a]

$$\|L_h u - f_h\|_{\cdot,h} \to 0 \quad \text{für } h \to 0,$$

d.h., dass der **Konsistenzfehler** für $h \to 0$ verschwindet.
Beachte: Dabei ist u beim Einsetzen in L_h auf U_h zu restringieren.[b]

(b) Das Schema (5.2) heißt **konsistent von der Ordnung p** bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\cdot,h}$, wenn gilt:

$$\|L_h u - f_h\|_{\cdot,h} = O(h^p) \quad \text{für } h \to 0.$$

[a] Hier ist zu beachten, dass $h \to 0$ eigentlich meint: $h_n = 1/n \to 0$.
[b] In manchen Büchern wird dafür noch ein Restriktionsoperator eingeführt.

Der Zusammenhang mit dem eigentlich interessierenden Fehler $u - u_h$ folgt später.

Wir konstruieren nun ein konsistentes Differenzen-Schema; Grundlage dafür ist die Taylorformel.

Wir wollen $(-\Delta u)(x)$ durch $u(x)$ sowie die vier benachbarten Werte

$$u(x_1 \pm h, x_2) \quad \text{und} \quad u(x_1, x_2 \pm h)$$

approximieren und machen den Ansatz:

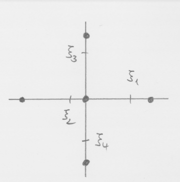
$$\begin{aligned}[L_h u](x) &:= Cu(x) + Eu(x_1 + h, x_2) + Wu(x_1 - h, x_2) \\ &\qquad + Nu(x_1, x_2 + h) + Su(x_1, x_2 - h) \\ &= -\Delta u(x) + O(h^p)\end{aligned}$$

mit möglichst hoher Ordnung p.

Falls $u \in C^4$ in einer Umgebung von x ist, so gilt:[9]

$$u(x_1+h,x_2) = u(x) + h\,D_1u(x) + \frac{h^2}{2}D_1^2u(x) + \frac{h^3}{6}D_1^3u(x) + \frac{h^4}{24}D_1^4u(\xi_1)$$
$$u(x_1-h,x_2) = u(x) - h\,D_1u(x) + \frac{h^2}{2}D_1^2u(x) - \frac{h^3}{6}D_1^3u(x) + \frac{h^4}{24}D_1^4u(\xi_2)$$
$$u(x_1,x_2+h) = u(x) + h\,D_2u(x) + \frac{h^2}{2}D_2^2u(x) + \frac{h^3}{6}D_2^3u(x) + \frac{h^4}{24}D_2^4u(\xi_3)$$
$$u(x_1,x_2-h) = u(x) - h\,D_2u(x) + \frac{h^2}{2}D_2^2u(x) - \frac{h^3}{6}D_2^3u(x) + \frac{h^4}{24}D_2^4u(\xi_4)$$

mit entsprechenden Zwischenstellen ξ_i.



[9] Man kann evtl. bei der Regularität mit (aber sicher nicht substantiell) weniger auskommen, wenn man eine andere (integrale) Darstellung des Restgliedes verwendet.

Aus dem Ansatz ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
&\big(C + E + W + N + S\big)u(x) \\
&+ h\,\big(E - W\big)D_1 u(x) && + h\,\big(N - S\big)D_2 u(x) \\
&+ \tfrac{h^2}{2}\big(E + W\big)D_1^2 u(x) && + \tfrac{h^2}{2}\big(N + S\big)D_2^2 u(x) \\
&+ \tfrac{h^3}{6}\big(E - W\big)D_1^3 u(x) && + \tfrac{h^3}{6}\big(N - S\big)D_2^3 u(x) \\
&+ \tfrac{h^4}{24}\big(E D_1^4 u(\xi_1) + W D_1^4 u(\xi_2)\big) && + \tfrac{h^4}{24}\big(N D_2^4 u(\xi_3) + S D_2^4 u(\xi_4)\big) \\
&\stackrel{!}{=} -D_1^2 u(x) - D_2^2 u(x) + O(h^p).
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert die eindeutige Lösung

$$C = 4/h^2, \quad E = W = N = S = -1/h^2,$$

welche auf eine Differenzenapproximation mit Konsistenzordnung $p = 2$ führt.

Der so konstruierte Differenzen-Operator wird anschaulich als sogenannter **5-Punkte-Stern**

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

geschrieben. Dieser ergibt die klassische **5-Punkte-Approximation**

$$\begin{aligned}[-\Delta_h^{(5)}u](x) = \frac{1}{h^2}\big[&4u(x) - u(x_1+h,x_2) - u(x_1-h,x_2) \\ &- u(x_1,x_2+h) - u(x_1,x_2-h)\big].\end{aligned} \tag{5.3}$$

Mit Hilfe der sogenannten Differenzenoperatoren

$$[D_j^+ u](x) = \frac{1}{h}\big[u(x + he_j) - u(x)\big] \quad \textbf{Vorwärtsdifferenz}$$

$$[D_j^- u](x) = \frac{1}{h}\big[u(x) - u(x - he_j))\big] \quad \textbf{Rückwärtsdifferenz}$$

mit Einheitsvektoren e_j, $j = 1, \dots, d$ können wir auch schreiben:

$$[-\Delta_h^{(5)} u](x) = -\sum_{j=1}^{2} [D_j^- D_j^+ u](x). \tag{5.4}$$

Für die rechte Seite wählen wir die einfache **Punkt-Auswertung**

$$f_h^{(1)}(x) = f(x)$$

und erhalten ein konkretes Diskretisierungsschema für die Aufgabe (5.1):

$$\begin{aligned} [-\Delta_h^{(5)} u_h](x) &= f_h^{(1)}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_h \\ u_h(x) &= 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_h. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Definition 5.2 (Diskrete L^∞-Norm)

Für Funktionen $v_h \in V_h$ (oder U_h^0) definieren wir die **diskrete L^∞-Norm**

$$\|v_h\|_{\infty,h} = \max_{x \in \Omega_h} |v_h(x)|.$$

Satz 5.3 (Konsistenzordnung des 5-Punkte-Schemas)

Es sei u die exakte Lösung von (5.1). Falls $u \in C^4(\overline{\Omega})$ ist

$$\left\| -\Delta_h^{(5)} u - f_h^{(1)} \right\|_{\infty,h} \leqslant \frac{h^2}{12} \Big[\max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D_1^4 u(x) \right| + \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D_2^4 u(x) \right| \Big]. \tag{5.6}$$

Bemerkung 5.4 (zur Konsistenzordnung)

(a) Die Konsistenzordnung $p = 2$ bleibt erhalten, wenn das Gitter nur in jeder einzelnen Koordinatenrichtung äquidistant mit Schrittweiten h_1 und h_2 ist und der 5-Punkte-Stern entsprechend angepasst wird.

(b) Auf nicht-äquidistanten Gittern geht die Konsistenzordnung auf 1 zurück.

- Das System (5.5) bildet ein lineares Gleichungssystem.
- Unbekannte: Funktionswerte

$$u_{i,j} \text{ von } u_h \text{ an den Stellen } x_{i,j} \text{ für } i,j = 0,1,\ldots,n.$$

- Die Funktionswerte am Rand Γ_h sind null und können direkt eliminiert werden.
- Sortiert man die verbleibenden Unbekannten $u_{i,j}$ in lexikographischer (zeilenweiser) Nummerierung, also

$$\boldsymbol{u}_h = (\underbrace{u_{1,1}, u_{2,1}, \ldots, u_{n-1,1}}_{\text{1. Zeile}}, \underbrace{u_{1,2}, u_{2,2}, \ldots, u_{n-1,2}}_{\text{2. Zeile}}, \ldots,$$
$$\underbrace{u_{1,n-1}, u_{2,n-1}, \ldots, u_{n-1,n-1}}_{(n-1).\text{ Zeile}})^\top,$$

so ergibt sich folgende Struktur:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ & & & -I & T \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}_h, \quad \text{oder kurz:} \quad L_h\, \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}_h. \tag{5.7}$$

Jede Blockzeile in (5.7) entspricht dabei einer Zeile von Unbekannten an den inneren Knoten im Gitter, und T ist die Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \quad \text{und} \quad I \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Beachte:

- Wir bezeichnen dabei mit L_h sowohl den Differenzenoperator (der auf Gitterfunktionen u_h angewendet wird) als auch seine Darstellung als Matrix (die auf Gitterfunktionen u_h bzw. deren Funktionswertevektor $\boldsymbol{u}_h$ wirkt).
- Die Matrixdarstellung hängt von der gewählten Nummerierung der Unbekannten und der Gleichungen ab.
- L_h bildet jetzt U_h^0 nach V_h ab, die Matrix L_h hat also die Dimension $(n-1)^2 \times (n-1)^2$.
- Die Koeffizienten des Differenzensterns kommen in jeder Zeile der Matrix L_h vor.

Bemerkung 5.5 (Eigenschaften von L_h)

(a) Die Matrix $L_h \in \mathbb{R}^{(n-1)^d \times (n-1)^d}$ wird schnell sehr groß. Bei $n = 101$ (also 100 inneren Gitterpunkten pro Raumdimension) ergibt sich in 2D ($d = 2$) eine $10\,000 \times 10\,000$-Matrix, in 3D ($d = 3$) bereits eine Matrix der Größe $1\,000\,000 \times 1\,000\,000$.

(b) Die Matrix besitzt jedoch eine spezielle Struktur: Sie ist dünn besetzt und hat (bei der obigen Abzählung) Bandstruktur mit halber Bandbreite $n-1$ in 2D. Dafür stehen effiziente Lösungsmethoden zur Verfügung, siehe Vorlesung numerische lineare Algebra oder Mehrgitterverfahren.

(c) Die Matrix L_h ist symmetrisch positiv definit.

(d) Das Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Eigenwert ist $O(h^{-2})$, unabhängig von der Raumdimension.

(e) Eliminiert man die $4\,n$ Randknoten nicht, so enthält das Gleichungssystem $4n$ zusätzliche triviale Gleichungen $u_{i,j} = 0$. Diese werden manchmal aus Skalierungsgründen in der Form

$$\frac{1}{h^2} u_{i,j} = 0$$

implementiert.

Frage: Wie schnell konvergiert die diskrete Lösung u_h gegen die kontinuierliche Lösung u?

FD-Konvergenzanalyse (Prinzip)

$$
\begin{aligned}
& L_h u_h = f_h && \text{diskrete Gleichung} \\
\Rightarrow\quad & L_h(u - u_h) = L_h u - f_h && \text{Fehlergleichung} \\
\Rightarrow\quad & u - u_h = L_h^{-1}\big(L_h u - f_h\big) && \\
\Rightarrow\quad & \underbrace{\|u - u_h\|}_{\text{Fehler}} \leqslant \big\|L_h^{-1}\big\| \underbrace{\|L_h u - f_h\|}_{\text{Konsistenzfehler}} && \text{Fehlerabschätzung} \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Wenn es gelingt, die Norm $\|L_h^{-1}\|$ des Lösungsoperators L_h^{-1} der diskreten Aufgabe unabhängig von h zu beschränken, dann nennt man das Differenzenverfahren **stabil**.

In diesem Fall folgt die Konvergenz des Verfahrens aus seiner Konsistenz, und die Konsistenzordnung überträgt sich auf die Konvergenzordnung.

Metatheorem:

$$\text{Konvergenz} = \text{Konsistenz} \ + \ \text{Stabilität}.$$

Beachte: Genauso wie der Konsistenzfehler kann auch der Fehler in der Lösung in verschiedenen Normen gemessen werden. Die Norm der benötigten Stabilitätsabschätzung muss jeweils dazu passen, also:

$$\|u - u_h\|_a \leqslant \left\|L_h^{-1}\right\|_{b\to a} \|L_h u - f_h\|_b \,.$$

Dabei ist die Operatornorm definiert als

$$\left\|L_h^{-1}\right\|_{b\to a} = \max_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{\left\|L_h^{-1} v_h\right\|_a}{\|v_h\|_b}.$$

Bei unserer homogenen Dirichlet-Aufgabe (5.2) steht „a“ für eine Norm in U_h^0 und „b“ für eine Norm in V_h.

Definition 5.6 (Konvergenz und Konvergenzordnung)

(a) Das Schema (5.2) heißt **konvergent** bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\cdot,h}$ in U_h^0, wenn gilt:

$$\|u - u_h\|_{\cdot,h} \to 0 \quad \text{für } h \to 0.$$

(b) Das Schema (5.2) heißt **konvergent mit der Ordnung** p bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\cdot,h}$ in U_h^0, wenn gilt:

$$\|u - u_h\|_{\cdot,h} = O(h^p) \quad \text{für } h \to 0.$$

Inhalt

Der Beweis der $\infty \to \infty$-Stabilität des 5-Punkte-Schemas $-\Delta_h^{(5)}$, siehe (5.5), basiert auf dem diskreten Maximumprinzip.

Satz 5.7 (Diskretes Maximumprinzip für $-\Delta_h^{(5)}$, vgl. Satz 3.3)

Für jede Gitterfunktion $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ ($u_h \in U_h$) gilt:

$$[-\Delta_h^{(5)} u_h](x) \leqslant 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega_h \qquad \Rightarrow \qquad \max_{x \in \overline{\Omega}_h} u_h(x) = \max_{x \in \Gamma_h} u_h(x),$$

d.h., u_h nimmt sein Maximum auf dem Rand Γ_h an.

Beachte: Das numerische Verfahren erhält also das Maximumprinzip, das für die kontinuierliche Aufgabe gilt.

Korollar 5.8 (Diskretes Vergleichsprinzip, vgl. Korrollar 3.5)

Es seien $v_h, w_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ Gitterfunktionen in U_h. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} [-\Delta_h^{(5)} v_h](x) \leqslant [-\Delta_h^{(5)} w_h](x) & \text{für alle } x \in \Omega_h \\ v_h(x) \leqslant w_h(x) & \text{für alle } x \in \Gamma_h \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v_h(x) \leqslant w_h(x) \\ \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h. \end{array}$$

Für die Stabilitätsabschätzung betrachten wir

$$L_h : \underbrace{U_h^0}_{\|\cdot\|_{\infty,h}} \to \underbrace{V_h}_{\|\cdot\|_{\infty,h}} \quad \text{und} \quad L_h^{-1} : V_h \to U_h^0$$

und statten beide Räume mit der Norm $\|\cdot\|_{\infty,h}$ aus. Wir müssen $\|L_h^{-1}\|_{\infty,h\to\infty,h} \leqslant C$ unabhängig von h zeigen. Dazu betrachten wir die Gleichung $L_h u_h = v_h$ mit $v_h \in V_h$ und Lösung $u_h \in U_h^0$ und weisen nach:

$$\|u_h\|_{\infty,h} \leqslant C \, \|v_h\|_{\infty,h} .$$

Satz 5.9 (Stabilität bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$ und $\|\cdot\|_{\infty,h}$)

Es sei $v_h : \Omega_h \to \mathbb{R}$ (in V_h) eine Gitterfunktion mit $\|v_h\|_{\infty,h} = \sigma$. Dann erfüllt die eindeutige Lösung u_h von

$$\begin{aligned} [-\Delta_h^{(5)} u_h](x) &= v_h^{(1)}(x) && \text{für alle } x \in \Omega_h \\ u_h(x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat

$$\|u_h\|_{\infty,h} \leqslant \frac{\sigma}{8}, \quad \text{d.h.,} \quad \left\|L_h^{-1}\right\|_{\infty,h\to\infty,h} \leqslant 1/8, \tag{5.9}$$

unabhängig von h.

Beachte: (5.9) heißt eine **A-priori-Abschätzung**, da sie die Norm der Lösung u_h durch die Norm der Daten v_h abschätzt, ohne dass man die Lösung kennen muss.

Satz 5.10 (Fehlerabschätzung bzgl. der diskreten L^∞-Norm)

Es sei u die eindeutige klassische Lösung von (5.1) und u_h die eindeutige Lösung von (5.5). Falls $u \in C^4(\overline{\Omega})$ gilt, dann erhalten wir die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{\infty,h} \leqslant \frac{h^2}{48} M_4(u), \tag{5.10}$$

d.h., das Verfahren (5.5) besitzt Konvergenzordnung $p = 2$ bzgl. der diskreten L^∞-Norm. Hierbei ist

$$M_k(u) = \max\left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u| : |\alpha| = k \right\}. \tag{5.11}$$

Bemerkung 5.11 (zur Fehlerabschätzung)

(a) Die Fehlerabschätzung (5.10) hat die typische Struktur

$$\|u - u_h\| \leqslant C\, h^p \, |||u|||,$$

wobei $|||\cdot|||$ eine (Halb-)Norm ist, die höhere Ableitungen als $\|\cdot\|$ enthält.

(b) Die Anforderungen an die Lösung (hier: $u \in C^4(\overline{\Omega})$), um Fehlerabschätzungen zu bekommen, sind bei FDV in der Regel sehr hoch. Sie werden i.Allg. nur bei glatt berandeten Gebieten oder speziellen Geometrien (z.B. Rechteck) sowie glatter rechter Seite $f \in C^2(\overline{\Omega})$ erfüllt sein.

Inhalt

Definition 5.12 (Diskrete L^2-Norm)

Für Funktionen $v_h, w_h \in V_h$ definieren wir

(a) das **diskrete L^2-Skalarprodukt**

$$(v_h, w_h)_h = h^d \sum_{x \in \Omega_h} v_h(x)\, w_h(x)$$

(b) die **diskrete L^2-Norm**

$$\|v_h\|_{0,h}^2 = h^d \sum_{x \in \Omega_h} |v_h(x)|^2.$$

(Für Funktionen in U_h ist dies nur eine Halbnorm.)

Beachte: Es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(v_h, w_h)_h| \leqslant \|v_h\|_{0,h}\, \|w_h\|_{0,h}\,. \tag{5.12}$$

Wie zuvor benötigen wir

- eine Abschätzung des Konsistenzfehlers (hier bzgl. der L^2-Norm),
- sowie die Stabilität des Differenzenschemas (in einem passenden Normpaar).

Ersteres ist einfach, denn für jede Gitterfunktion $v_h \in V_h$ auf dem Einheitsquadrat gilt:

$$\|v_h\|_{0,h}^2 = h^2 \sum_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2 \leqslant h^2(n-1)^2 \max_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2 \leqslant \|v_h\|_{\infty,h}^2 . \tag{5.13}$$

Man sagt: Die diskrete L^2-Norm ist **schwächer** als die diskrete L^∞-Norm. Aus (5.6) erhalten wir also auch eine Abschätzung für den Konsistenzfehler des Verfahrens (5.5) in der diskreten L^2-Norm:

$$\left\|-\Delta_h^{(5)} u - f_h^{(1)}\right\|_{0,h} \leqslant \frac{h^2}{12}\Big[\max_{x\in\overline{\Omega}} \left|D_1^4 u(x)\right| + \max_{x\in\overline{\Omega}} \left|D_2^4 u(x)\right|\Big] \leqslant \frac{h^2}{6} M_4(u). \tag{5.14}$$

Im Folgenden: Fehlerabschätzungen in $\|\cdot\|_{0,h}$ und darüber hinaus in der stärkeren Halbnorm $|\cdot|_{1,h}$. Das liegt daran, dass wir sogar die Beschränktheit (Stabilität) von $\|L_h^{-1}\|_{0,h\to 1,h}$ zeigen können.

Definition 5.13 (Diskrete H^1-Halbnorm)

Für Funktionen $v_h \in U_h$ definieren[a] wir die **diskrete H^1-Halbnorm**

$$|v_h|_{1,h}^2 = h^d \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x \in \overline{\Omega}_h \\ x+he_j \in \overline{\Omega}_h}} \left|[D_j^+ v_h](x)\right|^2 = h^d \sum_{j=1}^{d} \sum_{x \in \Omega_h \cup \Gamma_{h,\textbf{links}}} \left|[D_j^+ v_h](x)\right|^2 .$$

Dabei besteht $\Gamma_{h,\text{links}}$ aus den Randpunkten in Γ_h, die bzgl. der j-ten Koordinate „links“ liegen.

[a] Jetzt werden Randwerte der Funktion benötigt.

Lemma 5.14 (Diskrete Koerzivität)

Für alle Gitterfunktionen $u_h \in U_h^0$ und $v_h \in U_h$ auf dem Einheitsquadrat gilt:[a]

(a) $$\big(D_j^- v_h, u_h\big)_h = -\big(v_h, D_j^+ u_h\big)_h - h^2 \sum_{x \in \Gamma_{h,\textbf{links}}} v_h(x)[D_j^+ u_h](x)$$

„partielle Integration“

(b) $$\big(-\Delta_h^{(5)} u_h, u_h\big)_h = |u_h|_{1,h}^2.$$

[a] Die Randterme in (a) sind eigentlich gar keine, sondern sie erweitern nur das diskrete L^2-Skalarprodukt von den inneren Knoten auf die linken Randknoten, sodass von D_j^+ alle möglichen Differenzen erfasst werden.

Beachte: Diese Aussagen entsprechen den kontinuierlichen Aussagen

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j} u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_\Omega -\Delta u \, u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x$$

für hinreichend glatte Funktionen u, v, wobei u Nullrandwerte hat.

Wir betrachten jetzt die Stabilität von L_h in folgenden Normen:

$$L_h : \underbrace{U_h^0}_{|\cdot|_{1,h}} \to \underbrace{V_h}_{\|\cdot\|_{0,h}}$$

Dazu untersuchen wir wieder die Gleichung

$$L_h u_h = v_h, \qquad u_h \in U_h^0, \quad v_h \in V_h,$$

und weisen nach:

$$|u_h|_{1,h} \leqslant C \, \|v_h\|_{0,h}$$

mit C unabhängig von h.

Satz 5.15 (Stabilität bzgl. $\|\cdot\|_{0,h}$ und $|\cdot|_{1,h}$)

Es sei $v_h : \Omega_h \to \mathbb{R}$ (in V_h) eine Gitterfunktion. Dann erfüllt die eindeutige Lösung u_h von

$$\begin{aligned} [-\Delta_h^{(5)} u_h](x) &= v_h^{(1)}(x) && \text{für alle } x \in \Omega_h \\ u_h(x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat die A-priori-Abschätzung

$$|u_h|_{1,h} \leqslant \|v_h\|_{0,h}, \quad \text{d.h.,} \quad \left\|L_h^{-1}\right\|_{0,h\to 1,h} \leqslant 1, \tag{5.15}$$

unabhängig von h.

Lemma 5.16 (Diskrete Poincaré-Friedrichs-Ungleichung)

Es sei $u_h \in U_h^0$. Dann gilt

$$\|u_h\|_{0,h} \leqslant |u_h|_{1,h}. \tag{5.16}$$

Beachte: Die diskrete Poincaré-Friedrichs-Ungleichung sagt aus, dass zumindest auf dem Unterraum U_h^0 von U_h die Halbnorm $|\cdot|_{1,h}$ äquivalent zur vollen Norm $\|\cdot\|_{1,h}$ ist, denn:

$$|v_h|_{1,h}^2 \leqslant \|v_h\|_{0,h}^2 + |v_h|_{1,h}^2 = \|v_h\|_{1,h}^2 \leqslant 2\,|v_h|_{1,h}^2. \tag{5.17}$$

Die Abschätzungen (5.16) und damit (5.17) können aber nicht auf ganz U_h gelten, wähle etwa $v_h \equiv \text{const}$. Die kontinuierliche Version dieser Ungleichung folgt später.

Aus der Stabilität (5.15) und der Konsistenzabschätzung (5.14) erhalten wir nun wieder eine Konvergenzaussage:

Satz 5.17 (Fehlerabsch. bzgl. diskreter H^1-Halbnorm, vgl. Satz 5.10)

Es sei u die eindeutige klassische Lösung von (5.1) und u_h die eindeutige Lösung von (5.5). Falls $u \in C^4(\overline{\Omega})$ gilt, erhalten wir die Fehlerabschätzung

$$|u - u_h|_{1,h} \leqslant \frac{h^2}{6} M_4(u), \tag{5.18}$$

d.h. das Verfahren (5.5) besitzt Konvergenzordnung $p = 2$ bzgl. der diskreten H^1-Halbnorm.

Beachte: Diese Abschätzung könnte allerdings unscharf sein, weil wir zu Anfang in (5.13)–(5.14) die Konsistenzordnung bzgl. $\|\cdot\|_{0,h}$ einfach mit der in $\|\cdot\|_{\infty,h}$ abgeschätzt haben.

Korollar 5.18 (Fehlerabschätzung bzgl. der diskreten L^2-Norm und der vollen H^1-Norm)

Wegen (5.16) und (5.17) gilt also auch

$$\|u - u_h\|_{0,h} \leqslant \frac{h^2}{6} M_4(u). \tag{5.19}$$

und

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leqslant \sqrt{2}\,\frac{h^2}{6} M_4(u). \tag{5.20}$$

Inhalt

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse des § 5 verallgemeinern.

Definition 5.19 (Breite, Volumen eines Gebietes)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet.

(a) Dessen **Breite** $\underline{d}_\Omega$ sei der minimale Abstand zweier paralleler Hyperebenen, die das Gebiet Ω einschließen.

(b) Dessen **Volumen** $|\Omega|$ sei definiert durch $\int_\Omega 1 \, \mathrm{d}x$.

Wir betrachten hier nur quaderförmige Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, also

$$\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_d, b_d).$$

Dort gilt

$$\underline{d}_\Omega = \min_{i=1,\dots,d} (b_i - a_i) \quad \text{und} \quad |\Omega| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Wir arbeiten weiter mit äquidistanten kartesischen Gittern. Deren Gitterweite h sei so gewählt, dass der Rand von Ω korrekt erfasst wird.[10] Wir gehen zunächst die L^∞-Abschätzungen durch:

(a) Der „5-Punkte-Stern“ besteht im $\mathbb{R}^d$ aus $1 + 2\,d$ Summanden. Wir bezeichnen ihn dennoch weiter mit $\Delta_h^{(5)}$. Der Koeffizient des zentralen Punktes ändert sich zu $2\,d/h^2$.

(b) Für das „5-Punkte-Schema“ (5.5) gilt Satz 5.3 analog mit der angepassten Konsistenzabschätzung

$$\left\| -\Delta_h^{(5)} u - f_h^{(1)} \right\|_{\infty,h} \leqslant \frac{h^2}{12} \sum_{j=1}^{d} \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| D_j^4 u(x) \right| \leqslant d\,\frac{h^2}{12} M_4(u).$$

(c) Das diskrete Maximumprinzip für $-\Delta_h^{(5)}$ (Satz 5.7) und das Vergleichsprinzip (Korollar 5.8) gelten unverändert.

[10] Dazu müssen die Längenverhältnisse in den unterschiedlichen Dimensionen rational sein. Man kann aber auch wieder mit individuellen Gitterweiten pro Raumdimension arbeiten.

(d) In der Stabilitätsabschätzung bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$ (Satz 5.9) wählen wir als Vergleichsfunktion

$$w_h(x) = \frac{\sigma}{2}(x_i - a_i)(b_i - x_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, d\}.$$

Es gilt $[-\Delta_h^{(5)} w_h](x) = \sigma$ und $\max_{x \in \overline{\Omega}_h} w_h(x) \leqslant \frac{\sigma}{8}(b_i - a_i)^2$. Der Index i mit minimalem $b_i - a_i$ liefert die Stabilitätsabschätzung

$$\|v_h\|_{\infty,h} \leqslant \frac{\sigma}{8} \underline{d}_\Omega^2.$$

(e) Folglich erhalten wir analog zu Satz 5.10 die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{\infty,h} \leqslant d\, \underline{d}_\Omega^2 \, \frac{h^2}{96} M_4(u).$$

Bzgl. der Abschätzungen in der L^2-Norm ergibt sich folgendes Bild:

(a) Die Abschätzung (5.13) zwischen $\|\cdot\|_{0,h}$ und $\|\cdot\|_{\infty,h}$ ändert sich in[11]

$$\|v_h\|_{0,h}^2 = h^d \sum_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2 \leqslant h^d \prod_{j=1}^{d} \frac{b_i - a_i}{h} \max_{x\in\Omega_h} |v_h(x)|^2 = |\Omega|\ \|v_h\|_{\infty,h}^2 .$$

(b) In der Konsistenzfehlerabschätzung (5.14) ändert sich dementsprechend die Konstante:

$$\begin{aligned}\left\|-\Delta_h^{(5)} u - f_h^{(1)}\right\|_{0,h} &\leqslant |\Omega|^{1/2} \left\|-\Delta_h^{(5)} u - f_h^{(1)}\right\|_{\infty,h} \\ &\leqslant d\,|\Omega|^{1/2} \frac{h^2}{12} M_4(u).\end{aligned}$$

(c) Lemma 5.14 (diskrete Koerzivitätsabschätzung) gilt unverändert weiter.

[11] Die Anzahl der Summanden in $\sum_{x\in\Omega_h}$ wird in jeder Dimension um eins überschätzt.

(d) In der diskreten Poincaré-Friedrichs-Ungleichung (Lemma 5.16) ändert sich die Konstante:

$$\|v_h\|_{0,h} \leqslant \underline{d}_\Omega \, |v_h|_{1,h}.$$

(e) Damit wird die Stabilitätsabschätzung (Satz 5.15) wie folgt geändert:

$$|u_h|_{1,h} \leqslant \underline{d}_\Omega \, \|v_h\|_{0,h}$$

(f) Dementsprechend ändern sich auch die Konstanten in der Fehlerabschätzung (Satz 5.17):

$$|u - u_h|_{1,h} \leqslant \underline{d}_\Omega \, d \, |\Omega|^{1/2} \, \frac{h^2}{12} M_4(u)$$

(g) und in Korollar 5.18:

$$\|u - u_h\|_{0,h} \leqslant \underline{d}_\Omega |u - u_h|_{1,h} \leqslant \underline{d}_\Omega^2 \, d \, |\Omega|^{1/2} \, \frac{h^2}{12} M_4(u).$$

Fazit: Die Abschätzungen bleiben im Wesentlichen erhalten, insbesondere die Ordnungen bzgl. h. In die Konstanten gehen die Raumdimension d sowie die Größe des Gebietes in Form von $|\Omega|$ und $\min\limits_{i=1,\ldots,d}(b_i - a_i)$ ein.

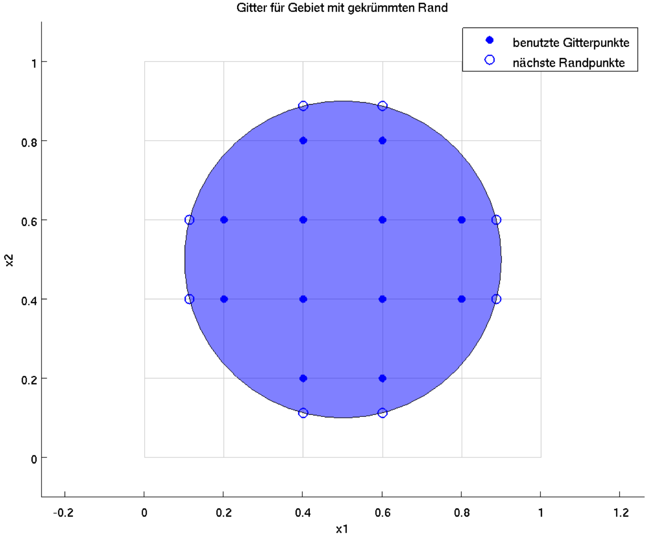
Inhalt

Wir behandeln jetzt die Diskretisierung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L\,u := -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{5.21}$$

mit „beliebigen“ Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir arbeiten weiter mit äquidistanten kartesischen Gittern. Für die Approximation der (evtl. gekrümmten) Ränder gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Es müssen nur die Punkte P besonders behandelt werden, in denen der (5-Punkte)-Differenzen-Stern nicht anwendbar ist, weil mindestens ein Nachbar nicht mehr im Gebiet liegt.



Gitter für Gebiet mit gekrümmten Rand
benutzte Gitterpunkte
nächste Randpunkte
x1
x2
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

(a) **Konstante Randwertextrapolation:** Im Punkt P wird die Gleichung

$$u_h(P) = g(P_0)$$

verwendet, wobei P_0 der zu P nächstgelegene Punkt auf Γ entlang der Gitterlinien ist.
Man kann zeigen: Dies ergibt (höchstens) eine Approximationsordnung von $p = 1$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$.

(b) **Lineare Randwertextrapolation:** Der Punkt P liegt zwischen einem Randpunkt P_0 wie oben und einem Punkt P_1 im Gitter. Die Abstände betragen $\left|\overrightarrow{PP_0}\right| = \alpha\, h$ und $\left|\overrightarrow{PP_1}\right| = h$ mit $0 < \alpha < 1$. Im Punkt P wird die Gleichung

$$u_h(P) = \frac{1}{1+\alpha}\big[g(P_0) + \alpha\, u_h(P_1)\big]$$

verwendet.
Dies ermöglicht wieder eine Approximationsordnung von $p = 2$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$.

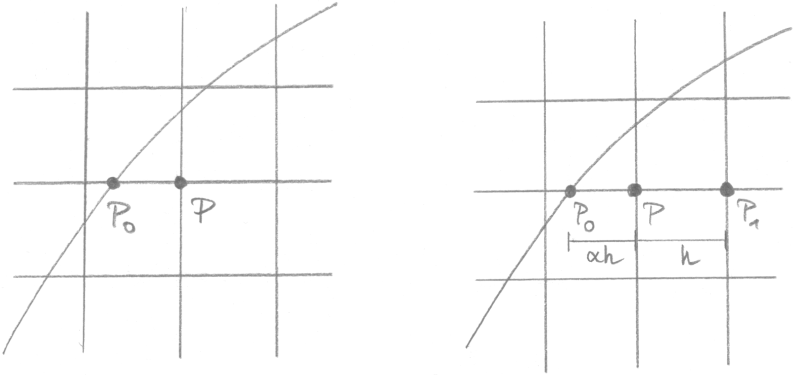
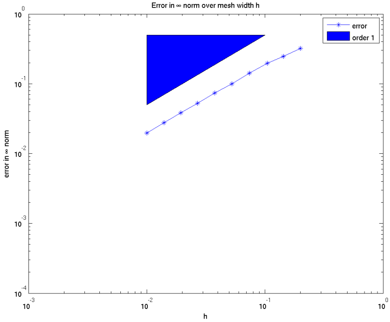


Abbildung 1: Konstante (links) und lineare Randwertextrapolation (rechts).



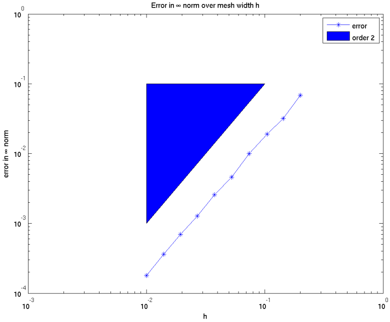


Abbildung 2: Fehler in der diskreten L^∞-Norm bei konstanter (links) bzw. linearer Randwertextrapolation (rechts) am Beispiel $-\Delta u = 4$ auf dem Einheitskreis, $u = 0$ am Rand; exakte Lösung: $u = 1 - (x_1^2 + x_2^2)$.

Inhalt

Literatur: [Grossmann et al., 2007; S. 87] und [Schwarz, 1997; Kapitel 10.1] .
Wir betrachten nun in (5.1) die Randbedingungen 2. und 3. Art:

$$\begin{aligned} L\,u := -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u &= g \quad \text{auf } \Gamma, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha \not\equiv 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei der Einfachheit halber wieder $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ ist. An allen inneren Gitterpunkten wird wieder der 5-Punkte-Stern verwendet. Zur Behandlung der Randpunkte P_0 gibt es wiederum mehrere Möglichkeiten:

Variante 1: Man approximiert mit einseitigen Differenzen

$$\frac{\partial}{\partial n} u(P_0) \approx \frac{u(P_0) - u(P_1)}{h},$$

wobei P_1 der jeweils nächstgelegene innere Gitterpunkt in Gegenrichtung von n ist. Aus der RB in (5.22) erhält man also die Gleichung

$$\frac{u_h(P_0) - u_h(P_1)}{h} + \alpha\, u_h(P_0) = g(P_0)$$

für alle Randpunkte mit Ausnahme der Ecken. In den Eckpunkten entstehen zwei solche konkurrierenden Gleichungen, die man z.B. addieren kann.

Man kann zeigen: Dies ergibt höchstens eine Approximationsordnung von $p = 1$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$.

Variante 2: Eine Approximation 2. Ordnung ist aufwendiger: Man führt vorübergehend eine Schicht von Hilfsgitterpunkten („Geisterpunkte“) ein, sodass man auch in P_0 (inkl. der Ecken) den 5-Punkte-Stern anwenden kann. Nun kann man $\partial u/\partial n$ im Punkt P_0 mit dem *zentralen* Differenzenquotienten

$$\frac{\partial}{\partial n} u(P_0) \approx \frac{u(P_1') - u(P_1)}{2h}$$

approximieren (2. Ordnung!) und erhält aus der RB die fehlende Gleichung

$$\frac{u_h(P_1') - u_h(P_1)}{2h} + \alpha\, u_h(P_0) = g(P_0)$$

für den Funktionswert am Geisterpunkt $u_h(P_1')$. In der Regel wird man diese gleich in den Differenzenstern bei P_0 einarbeiten.

Im Beispiel (Abbildung 3) ergibt sich etwa am rechten Rand der modifizierte Differenzenstern

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -2 & 4+2\,\alpha\,h & 0 \\ & -1 & \end{bmatrix} \tag{5.23a}$$

bzw. in der rechten unteren Ecke

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -2 & \\ -2 & 4+4\,\alpha\,h & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}. \tag{5.23b}$$

In der Regel teilt man noch (5.23a) durch 2 und (5.23b) durch 4, um wieder eine symmetrische Systemmatrix zu erhalten.In die rechte Seite fließen noch die Daten von g ein. Dieser Ansatz ermöglicht wieder eine Approximationsordnung von $p = 2$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty,h}$.

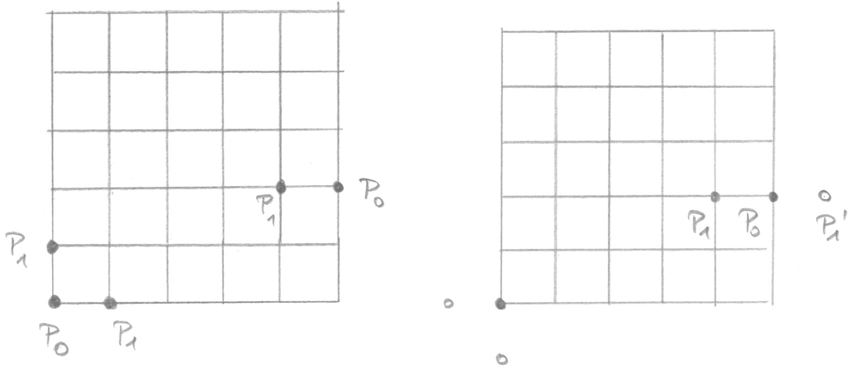


Abbildung 3: Approximation 1. Ordnung allgemeiner RB (links) und 2. Ordnung mit „Geisterpunkten“ (rechts).

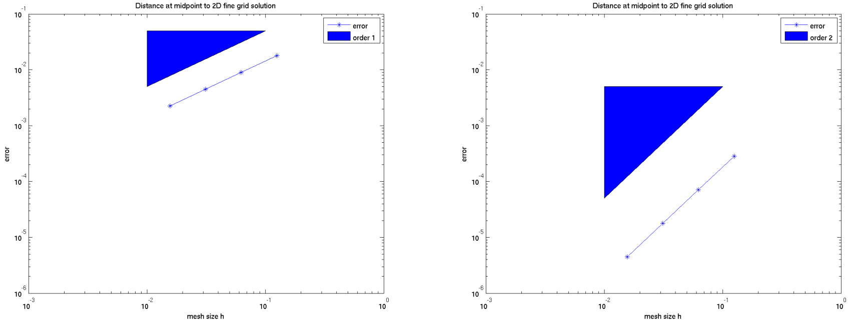


Abbildung 4: Fehler zur Feingitterlösung am Mittelpunkt des Einheitsquadrates für obige Approximationen 1. Ordnung (links) bzw. 2. Ordnung (rechts) der Robin-Randbedingungen.

Inhalt

Literatur: [Grossmann et al., 2007, Kapitel 2.6]

Wir behandeln jetzt FD-Verfahren für die parabolische Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad && \text{in } Q = \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

mit homogenen Dirichlet-RB auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

- Zusätzlich zum Ortsgitter mit Punkten $x_{i,j}$ führen wir ein Zeitgitter

$$t^k := k\,\tau, \qquad k = 0, 1, \dots, M$$

ein zur Zeitschrittweite $\tau = T/M$.
Es gibt also nun zwei Diskretisierungsparameter: h und τ.

- Die Werte einer Gitterfunktion $u_{h,\tau}$ bezeichnen wir mit

$$u_{h,\tau}(x_{i,j}, t^k) =: u_{i,j}^k.$$

- Für die Diskretisierung des $-\Delta$ verwenden wir wieder $-\Delta_h^{(5)}$ bzw. die Matrix L_h aus (5.7).
- Die Zeitableitung am Punkt $(x_{i,j}, t^k)$ ersetzen wir durch die finite Differenz 1. Ordnung

$$D_t^+ u(x_{i,j}, t^k) = \frac{u(x_{i,j}, t^{k+1}) - u(x_{i,j}, t^k)}{\tau}.$$

Wir betrachten folgende Klasse von Orts-Zeit-Diskretisierungs-Schemata mit einem Parameter $\theta \in [0,1]$:[12]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\left[u(x,t^{k+1}) - u(x,t^k)\right] &= \Delta_h^{(5)}\left[\theta\, u(x,t^{k+1}) + (1-\theta)\, u(x,t^k)\right] + f(x,t^{k+\theta}) \\
&\qquad\qquad \text{für alle } x \in \Omega_h,\ k = 0,\dots,M-1, \\
u(x,t^k) &= 0 \qquad\quad\ \text{für alle } x \in \Gamma_h,\ k = 1,\dots,M, \\
u(x,t^0) &= u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Dabei bedeutet

$$f(x,t^{k+\theta}) := f(x, \theta\, t^{k+1} + (1-\theta)\, t^k).$$

Beachte: Das Schema transportiert Information nur in positive Zeitrichtung, wie wir es auch bei der kontinuierlichen Lösung beobachten (siehe § 2).
Daher kann (6.2) Zeitschicht für Zeitschicht gelöst werden.

[12] Wir benennen die Funktion im Schema hier mit u statt $u_{h,\tau}$, könnten die Funktionswerte natürlich auch mit $u_{i,j}^k$ etc. bezeichnen.

Besondere Bedeutung haben folgende Werte von θ:

(a) $\theta = 0$: explizites (Vorwärts-)Euler-Schema

(b) $\theta = 1$: implizites (Rückwärts-)Euler-Schema

(c) $\theta = 1/2$: Crank-Nicolson-Schema

Diese führen zu folgenden Ort-Zeit-Differenzensternen (siehe Abbildung 5).

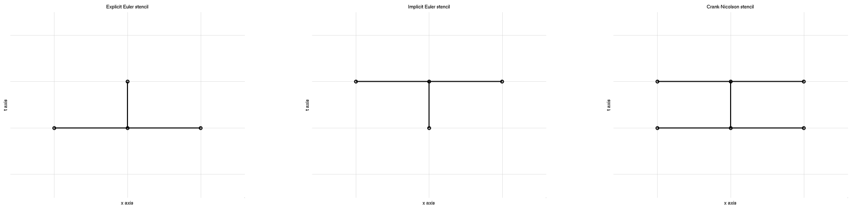


Abbildung 5: Schematische Differenzensterne für das explizite Euler-Verfahren ($\theta = 0$, links), das implizite Euler-Verfahren ($\theta = 1$, Mitte) und das Crank-Nicolson-Verfahren ($\theta = 1/2$, rechts) für $\Omega \subset \mathbb{R}$.

- Der Fall $\theta = 0$ führt auf ein *explizites* Verfahren.
- Für $\theta > 0$ ergeben sich *implizite* Verfahren, d.h., in jedem Zeitschritt ist ein lineares Gleichungssystem

$$\left(\frac{1}{\tau}I + \theta\, L_h\right) \boldsymbol{u}^{k+1} = \left(\frac{1}{\tau}I - (1-\theta)\, L_h\right) \boldsymbol{u}^k + \boldsymbol{f}^{k+\theta}$$

für die Unbekannten $\boldsymbol{u}^{k+1}$, bzw. $u(x, t^{k+1})$ mit $x \in \Omega_h$, zu lösen.

Satz 6.1 (Konsistenzordnung der parabolischen Schemata)

Es sei u die exakte Lösung von (6.1). Falls $u \in C^4(\overline{Q})$ bzgl. des Ortes und $u \in C^2(\overline{Q})$ und damit $f \in C^1(\overline{Q})$ bzgl. der Zeit sind, dann ist der Konsistenzfehler des Schemas (6.2) bzgl. der diskreten L^∞-Norm $\|\cdot\|_{\infty,h,\tau}$ von folgender Größenordnung:

(a) $O(h^2 + \tau)$ für jedes $\theta \in [0, 1]$

(b) $O(h^2 + \tau^2)$ für $\theta = 1/2$, falls zusätzlich $u \in C^3(\overline{Q})$ und $f \in C^2(\overline{Q})$ bzgl. der Zeit sind.

Wir untersuchen nun die Stabilität des Verfahrens (6.2) bzgl. der diskreten L^∞-Norm. Dazu ersetzen wir (vgl. z.B. Satz 5.9 und Satz 5.15) im Schema (6.2) u durch v und die Daten u_0 und f durch d:[13]

$$\begin{aligned} d(x,t^0) &:= u_0(x) && \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h, \\ d(x,t^{k+1}) &:= f(x,t^{k+\theta}) && \text{für alle } x \in \Omega_h, \quad k = 0,\dots,M-1. \end{aligned}$$

Wir müssen feststellen, ob wir

$$\|v\|_{\infty,h,\tau} := \max_{0 \leqslant k \leqslant M} \max_{x \in \Omega_h} \left|v(x,t^k)\right|$$

gleichmäßig in h und τ abschätzen können durch die Norm der Daten $\|d\|_{\infty,h,\tau}$, also durch

$$\max_{x \in \Omega_h} |u_0(x)| \qquad \text{und} \qquad \max_{0 \leqslant k \leqslant M-1} \max_{x \in \Omega_h} \left|f(x,t^{k+\theta})\right|.$$

[13] Wir schreiben auch hier wieder v statt $v_{h,\tau}$ und d statt $d_{h,\tau}$.

Beachte: Da die AB $u(x, t^0) = u_0(x)$ im Schema (6.2) keinen Konsistenzfehler erzeugt, würde es ausreichen, $d(x, t^0) = 0$ zu wählen.

Wir betrachten einen Zeitschritt $t^k \to t^{k+1}$ von (6.2) für $k \geqslant 0$, den wir mit Hilfe von

$$F(x, t^k) := \left(I + \tau\,(1-\theta)\,\Delta_h^{(5)}\right)\,v(x, t^k) + \tau\,f(x, t^{k+\theta})$$

als

$$\begin{aligned} \left(I - \tau\,\theta\,\Delta_h^{(5)}\right) v(x, t^{k+1}) &= F(x, t^k) \quad && \text{für alle } x \in \Omega_h, \\ v(x, t^{k+1}) &= 0 && \text{für alle } x \in \Gamma_h \end{aligned} \tag{6.3}$$

schreiben.

Satz 6.2 (Stabilität bzgl. der diskreten L^∞-Norm)

Unter der Stabilitätsbedingung

$$1 - 4\,(1-\theta)\frac{\tau}{h^2} \geqslant 0, \qquad \text{also} \qquad (1-\theta)\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{4} \tag{6.4}$$

ist das Schema (6.2) stabil bzgl. der diskreten L^∞-Norm auf Q.

Bemerkung 6.3 (zur Stabilitätsbedingung)

(a) Für das implizite Eulerverfahren ($\theta = 1$) ist (6.4) stets erfüllt.

(b) Für alle anderen Verfahren mit $\theta \in [0, 1)$ bedeutet die *hinreichende* Stabilitätsbedingung (6.4) eine Einschränkung an die maximale Zeitschrittweite τ zu gegebener Ortsschrittweite h. Die Einschränkung ist umso gravierender, je „expliziter" das Schema (je kleiner θ) ist. Ist (6.4) nicht erfüllt, so kann es zu unphysikalischen Oszillationen in der Lösung kommen.

(c) Bzgl. der L^2-Norm gelten andere Stabilitätsaussagen.

Satz 6.4 (Fehlerabschätzung bzgl. der diskreten L^∞-Norm)

Die exakte Lösung u von (6.1) erfülle die Voraussetzungen von Satz 6.1 (a) bzw. (b). Falls die Stabilitätsbedingung (6.4) erfüllt ist, dann erhalten wir für die Lösung aus (6.2) die Fehlerabschätzungen

(a) für das allgemeine Verfahren mit $\theta \in [0, 1]$

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h} \leqslant C\left(h^2 + \tau\right) \tag{6.5}$$

(b) für das Crank-Nicolson-Verfahren mit $\theta = 1/2$

$$\|u - u_{h,\tau}\|_{\infty,h} \leqslant C\left(h^2 + \tau^2\right). \tag{6.6}$$

Beachte: Durch die Konsistenzfehlerabschätzung (Satz 6.1) gehen in die Konstante C wieder höhere Ableitungen der Lösung u ein, vgl. Bemerkung 5.11.

Inhalt

Wir betrachten jetzt noch FD-Verfahren für die hyperbolische Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ u_t &= v_0 && \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit homogenen Dirichlet-RB auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$.

- Wir benutzen wieder das Ortsgitter $x_{i,j}$ und das Zeitgitter

  $$t^k := k\,\tau, \quad k = 0, 1, \dots, M$$

  zur Zeitschrittweite $\tau = T/M$.

- Die Werte einer Gitterfunktion $u_{h,\tau}$ bezeichnen wir wieder mit

$$u_{h,\tau}(x_{i,j}, t^k) = u_{i,j}^k.$$

- Die zweite Zeitableitung am Punkt $(x_{i,j}, t^k)$ ersetzen wir durch die finite Differenz

$$D_t^- D_t^+ u(x_{i,j}, t^k) = \frac{u(x_{i,j}, t^{k+1}) - 2\, u(x_{i,j}, t^k) + u(x_{i,j}, t^{k-1})}{\tau^2}.$$

- Zum Start des Verfahrens verwenden wir für die ersten zwei Zeitschichten die Anfangswerte

$$\begin{aligned} u(x, t^0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h \\ u(x, t^1) &= u(x, t^0) + \tau\, v_0(x) && \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h. \end{aligned}$$

- Für die Diskretisierung des $-\Delta$ verwenden wir wieder $-\Delta_h^{(5)}$ bzw. die Matrix L_h aus (5.7).

Wir erhalten das voll-diskrete Schema

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tau^2}\big[u(x,t^{k+1}) - 2\,u(x,t^k) + u(x,t^{k-1})\big] &= \Delta_h^{(5)} u(x,t^k) + f(x,t^k) \\
&\qquad \text{für alle } x \in \Omega_h,\ k = 1,\dots,M-1, \\
u(x,t^{k+1}) = 0 &\qquad \text{für alle } x \in \Gamma_h,\ k = 1,\dots,M-1, \\
u(x,t^0) = u_0(x) &\qquad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h, \\
u(x,t^1) = u(x,t^0) + \tau\, v_0(x) &\qquad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}_h.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Das Schema (7.2) ist explizit und wird als **Leapfrog-Schema**[14] bezeichnet, siehe Abbildung 6. Seine Stabilität kann man wieder nur unter Beschränkungen der Zeitschrittweite zeigen.

[14] deutsch: Bockspringen

Ein gebräuchliches implizites Schema mit besseren Stabilitätseigenschaften erhält man, wenn man in (7.2) die erste Gleichung ersetzt durch

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau^2}\big(u(x,t^{k+1}) - 2\,u(x,t^k) + u(x,t^{k-1})\big) \\
&\qquad\qquad = \Delta_h^{(5)}\left(\frac{1}{2}u(x,t^{k+1}) + \frac{1}{2}u(x,t^{k-1})\right) + f(x,t^k),
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

siehe auch Abbildung 6. Hierbei ist in jedem Zeitschritt $k = 1,\dots,M-1$ das LGS

$$
\left(I + \frac{\tau^2}{2}L_h\right) u(\cdot,t^{k+1}) = 2\,u(\cdot,t^k) - \left(I + \frac{\tau^2}{2}L_h\right) u(\cdot,t^{k-1}) + \tau^2 f(\cdot,t^k)
$$

zu lösen.

Hyperbolische Anfangs-Randwertaufgaben

Differenzenschema

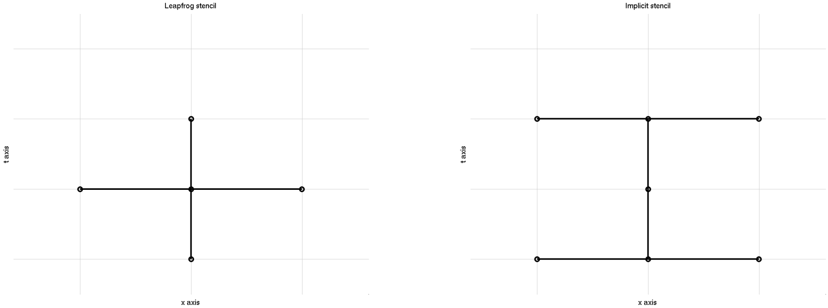


Abbildung 6: Schematische Differenzensterne für das (explizite) Leapfrog-Verfahren (links) und ein implizites Schema (rechts).

Bemerkung 7.1 (zur Stabilität hyperbolischer Schemata)

Im Unterschied zur Stabilitätsbedingung (6.4) im parabolischen Fall erhält man für hyperbolische Gleichungen eine weniger restriktive Beschränkung der Art $\tau \leqslant C\,h$. Dies steht im Zusammenhang mit dem Verlauf der Charakteristiken, also der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information im Unterschied zum parabolischen Fall.

Weiterführende Literatur:

- R. Rannacher: Skript zur Vorlesung Numerische Mathematik 2 (2008), §6.1.
- [Grossmann et al., 2007], S. 119–121.
- G. Strang: Skript zu MIT 18.086: Applied Mathematics (2006)
- B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, J. Oliger: Time-Dependent Problems and Difference Methods, Wiley (2013) 2nd ed.
- R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathematische Annalen 100 (1): 32–74 (1928)