Numerik partieller Differentialgleichungen

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Inhalt I

Teil I

Einführung

Inhalt

1 Grundbegriffe

2 Klassifikation linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

3 Wohlgestellte Aufgaben und Lösungseigenschaften

4 Ausblick

Bei **gewöhnlichen Differentialgleichungen** (ODEs) sucht man eine Funktion *einer* unabhängigen Variablen (hier mit x bezeichnet)

$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

die auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$ eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0, \qquad x \in (a, b),$$

erfüllt.[1] Eine Lösung wird erst durch weitere Zusatzbedingungen (Anfangs- und/oder Randbedingungen) eindeutig bestimmt.

[1] Genauer gesagt: u kann auch von weiteren Variablen abhängen; entscheidend ist, dass sämtliche auftretenden Ableitungen stets nach derselben Variablen gebildet werden.

Bei **partiellen Differentialgleichungen** (PDEs) ist eine Funktion $u = u(x_1, \dots, x_d)$ *mehrerer* unabhängiger Variablen

$$u : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

auf einer gegebenen (offenen) Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, oft $d \in \{2, 3, 4\}$. Anstelle der Ableitungen $u'(x), \dots, u^{(m)}(x)$ treten hier *partielle Ableitungen* auf, z.B.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_4}.$$

Weitere Schreibweisen:

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad D_i D_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}, \quad D_i^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{x_i x_i} \quad \text{etc.}$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

$$\nabla u = (D_1 u, D_2 u, \dots, D_d u)^\top$$ **Gradient**

$$\nabla\cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{d} D_i u_i \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_d)^\top$$ **Divergenz**

$$\Delta u = \nabla\cdot(\nabla u) = \sum_{i=1}^{d} D_i^2 u$$ **Laplace**

$$\nabla^2 u = [D_i D_j u]_{i,j=1}^{d}$$ **Hesse-Matrix**

$$\nabla\times \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} D_2 u_3 - D_3 u_2 \\ D_3 u_1 - D_1 u_3 \\ D_1 u_2 - D_2 u_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_d)^\top$$ **Rotation**

Definition 1.1 (Partielle Differentialgleichung 2. Ordnung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen.

(a) Eine Gleichung der Form

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1.1}$$

heißt **partielle Differentialgleichung (PDgl, PDE) zweiter Ordnung** in d Variablen.

(b) (1.1) heißt **quasilinear**, wenn sie von der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) D_i D_j u + G(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1.2}$$

ist (alle Ableitungen zweiter Ordnung treten linear auf).

(c) (1.1) heißt **semilinear**, wenn sie von der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) D_i D_j u + G(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1.3}$$

ist (alle Ableitungen zweiter Ordnung treten linear auf mit (höchstens) von x abhängigen Koeffizienten).

(d) (1.1) heißt **linear**, wenn sie von der Form

$$-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) D_i u + a(x) u = f(x) \tag{1.4}$$

ist. Die Funktionen a_{ij}, a_i und a heißen **Koeffizienten**, die Funktion f heißt **Quellterm** oder **rechte Seite** der PDE.

Für allgemeine PDEs zweiter Ordnung (1.1) gibt es keine einheitliche Lösungstheorie.[2] Wir behandeln daher im Wesentlichen lineare PDEs (1.4) zweiter Ordnung.

Wir verlangen folgende Eigenschaften von einer **wohlgestellten Aufgabe** (auch **korrekt gestellt** bzw. **sachgemäß gestellt**):

(1) Existenz einer Lösung

(2) Eindeutigkeit der Lösung

(3) stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.[3]

Für die Eindeutigkeit der Lösung werden wir wie bei ODEs noch zusätzliche Bedingungen stellen müssen.

[2] Daher müsste man sich auch vor der Bestimmung numerischer Lösungen davon überzeugen, dass die Aufgabe sinnvoll gestellt ist.

[3] um zumindest geringe (numerische) Fehler in den Daten verkraften zu können

Inhalt

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Oft haben die unabhängigen Variablen $x = (x_1, \dots, x_d)$ die Bedeutung von Ortsvariablen, ggf. kommt unter ihnen auch noch die Zeit $t = x_d$ vor. Wir betrachten als Prototypen die folgenden linearen PDEs 2. Ordnung:

die **Poisson-Gleichung**	$-\Delta u = f,$
die **Wärmeleitungsgleichung**	$u_t - \Delta u = f,$
die **Wellengleichung**	$u_{tt} - \Delta u = f.$

Achtung: Der Laplace-Operator wirkt immer nur bzgl. der Ortsvariablen.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Die Klassifikation von linearen PDEs 2. Ordnung (1.4) hängt vom **Hauptteil** des Differentialoperators L ab:

$$L\,u = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,D_i D_j u. \tag{2.1}$$

Dabei können wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen.[4] Die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1}(x) & \cdots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

ist also symmetrisch.

[4] Denn nach dem Satz von Schwarz sind zumindest bei klassischen Lösungen D_i und D_j vertauschbar.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Bei Anfangswertaufgaben für lineare ODEs 2. Ordnung

$$a(x)\,u'' + b(x)\,u' + c(x)\,u = f(x), \quad a(x) \neq 0$$

können wir aus den Anfangswerten $u(x_0)$ und $u'(x_0)$ durch Auflösen die Größe $u''(x_0)$ bestimmen und die Lösung durch Hochintegrieren gewinnen, z.B. numerisch mit dem expliziten Eulerverfahren:

$$u'(x_0 + h) \approx u'(x_0) + u''(x_0)\,h, \qquad u(x_0 + h) \approx u(x_0) + u'(x_0)\,h$$

usw.

Frage: Welche Daten und Voraussetzungen brauchen wir, um analog (1.4) zu lösen?

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Definition 2.1 (Charakteristischer Punkt, Charakteristik)

Gegeben sei eine differenzierbare überschneidungsfreie Kurve $s \mapsto x(s) \in \mathbb{R}^2$ mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}(s)$.

(a) Die Kurve $x(s)$ heißt **charakteristisch** im Punkt $x(s_0)$ für die PDE (1.4), wenn gilt:
$$\boldsymbol{n}(s_0)^\top A(x(s_0))\, \boldsymbol{n}(s_0) = 0. \tag{2.2}$$

(b) Die Kurve $x(s)$ heißt eine **charakteristische Kurve** oder eine **Charakteristik** für die PDE (1.4), wenn sie in jedem Punkt $x(s)$ charakteristisch ist.

Beachte: Die Lösung der PDE (1.4) kann Unstetigkeiten in den Funktionswerten und/oder Ableitungen entlang charakteristischer Kurven haben.
Die Definition 2.1 kann direkt auf höhere Dimensionen übertragen werden.
Charakteristiken sind dann $(d-1)$-dimensionale Hyperflächen im $\mathbb{R}^d$.

Frage: Wieviele Charakteristiken gehen durch einen gegebenen Punkt x_0? Soviele, wie es linear unabhängige Normalenvektoren in diesem Punkt gibt, die (2.2) erfüllen!

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\boldsymbol{n}^\top A(x_0)\,\boldsymbol{n} = 0$$

ist eine rein-quadratische Quadrik (Kegelschnitt) im $\mathbb{R}^d$, die nur von den Koeffizienten im Hauptteil (2.1) abhängt. In Anlehnung an die Bezeichnung allgemeiner Quadriken definiert man:

Definition 2.2 (Klassifikation von PDEs 2. Ordnung)

Der Differentialoperator L aus (1.4) heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$

(a) **elliptisch**, wenn $A(x_0)$ positiv definit oder negativ definit ist.[a]

(b) **parabolisch**, wenn $A(x_0)$ genau einen Eigenwert Null hat und alle anderen entweder alle positiv oder alle negativ sind.[b]

(c) **hyperbolisch**, wenn $A(x_0)$ genau einen negativen Eigenwert hat und alle anderen positiv sind (oder umgekehrt).[c]

[a] Die Lösungsmenge besteht nur aus $\boldsymbol{n} = 0$.

[b] Die Lösungsmenge besteht aus einem eindimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^d$, dem Kern von $A(x_0)$.

[c] Die Lösungsmenge ist für $d = 2$ ein Paar sich im Ursprung schneidender Geraden, im Fall $d = 3$ ein Doppelkegel.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Der Fall $d = 2$ ist damit komplett erfasst.

Im Fall $d \geqslant 3$ gibt es sogenannte ultraparabolische und ultrahyperbolische Differentialoperatoren, die wir aber nicht betrachten.[5]

Korollar 2.3 (Anzahl Charakteristiken)

Ist L in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^d$

(a) elliptisch, dann existiert dort keine (reelle) Charakteristik;

(b) parabolisch, dann geht genau eine Charakteristik durch x_0;

(c) hyperbolisch, dann gehen im Fall $d = 2$ genau zwei Charakteristiken durch x_0.

---

[5] Die Definition 2.2 ist invariant gegenüber Koordinatentransformation. Dies sieht man auch im Beispiel bei der Transformation des Laplace-Operators in Polarkoordinaten.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Beispiel 2.4 (Poisson-Gleichung)

Die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ ist wegen

$$A(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt elliptisch. Sie besitzt keine Charakteristiken.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Beispiel 2.5 (Wärmeleitungsgleichung)

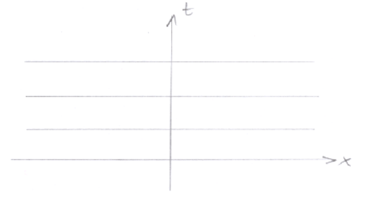
Die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = f$ ist wegen

$$A(x,t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\color{red}0} \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt parabolisch.
Charakteristiken haben Normalenvektoren, die

$$\boldsymbol{n}^\top A\,\boldsymbol{n} = 0$$

erfüllen, also $\boldsymbol{n} = (0,\ldots,0,1)^\top$ und Vielfache. Charakteristiken sind also gerade die Mengen $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : t = \text{const}\}$.



Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Beispiel 2.6 (Wellengleichung)

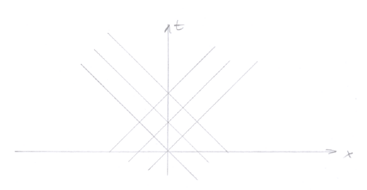
Die Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = f$ ist wegen

$$A(x,t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in jedem Punkt hyperbolisch.
Charakteristiken haben Normalenvektoren, die

$$\boldsymbol{n}^\top A\, \boldsymbol{n} = 0$$

erfüllen, also $\boldsymbol{n} = (\tilde{\boldsymbol{n}}, 1)^\top$ und Vielfache, wobei $\tilde{\boldsymbol{n}} \in \mathbb{R}^{d-1}$ mit $|\tilde{n}| = 1$ ist. $|\cdot|$ bezeichnet die Euklidische Norm. Charakteristiken im Fall $d = 2$ (örtlich 1D) sind also gerade die Mengen $\{(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x+t = \text{const}\}$ und $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -x + t = \text{const}\}$.



Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Beispiel 2.7 (Tricomi-Gleichung)

Die **Tricomi-Gleichung**

$$-x_2\, D_1^2 u - D_2^2 u = 0$$

ist wegen

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elliptisch für $x_2 > 0$, parabolisch für $x_2 = 0$ und hyperbolisch für $x_2 < 0$.

Klassifikation linearer PDEs 2. Ordnung

Bemerkung 2.8 (Alternative Definition von Charakteristiken)

Alternativ zur Definition 2.1 über parametrisierte Kurven bzw. Hyperflächen können wir Charakteristiken auch implizit als Niveaumenge $F(x) = C$ formulieren, wobei $\boldsymbol{n}(x) = \nabla F(x)$ ein Normalenvektor wird. Dann geht (2.2) über in die **charakteristische Gleichung**

$$\nabla F(x)^\top A(x) \nabla F(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)(D_i F)(D_j F) = 0, \tag{2.3}$$

also eine nichtlineare PDE 1. Ordnung für $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Ist F eine Lösung von (2.3), dann ist jede Niveaumenge

$$N_C = \{x \in \mathbb{R}^d : F(x_1, \ldots, x_d) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

eine Charakteristik von (1.4), falls N_C eine $(d-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Frage: Welche Randbedingungen bzw. Anfangsbedingungen (bzgl. der Zeit) kann man stellen, um ein wohlgestelltes Problem zu bekommen? Was sind typische Lösungseigenschaften, die numerische Verfahren berücksichtigen sollten?
Dies wollen wir nun noch kurz in § 3 untersuchen.

Inhalt

Inhalt

Als Beispiel dient wieder die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes **Gebiet**, d.h. eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge. Den Rand von Ω bezeichnen wir mit Γ. Dort stellen wir Randbedingungen (RB) an die Lösung. Üblich (und physikalisch motiviert) sind folgende Arten:

(1) **Dirichlet**-RB oder RB 1. Art: $u = g$ auf Γ,

(2) **Neumann**-RB oder RB 2. Art: $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ auf Γ,

(3) **Robin**-RB oder RB 3. Art: $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u = g$ auf Γ mit $\alpha \geqslant 0$. Manchmal formuliert man diese RB auch als $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha\, u = \alpha\, g$.

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ der äußere Normaleneinheitsvektor an Ω, und $\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n}^\top \nabla u = \boldsymbol{n} \cdot \nabla u$ die Normalenableitung (Richtungsableitung in Richtung von $\boldsymbol{n}$) von u, die auch mit $\partial_n u$ bezeichnet wird.

Bemerkung 3.1 (zu Randbedingungen)

(a) Die RB heißen **homogen**, wenn die rechte Seite in der RB $g = 0$ ist, ansonsten **inhomogen**.

(b) Die Art der RB kann auch entlang Γ wechseln. Man spricht dann von einer Aufgabe mit **gemischten Randbedingungen**.

(c) Randbedingungen sind durch physikalische Bedingungen motiviert, aber auch etwa durch Symmetriebedingungen.

Parabolische Gleichungen (siehe § 2) wie $u_t - \Delta u = f$ sind Modelle für Diffusionsprozesse. Falls ein solcher Prozess einen stationären Zustand besitzt, dann ist dieser durch $u_t = 0$ gekennzeichnet, also $-\Delta u = f$. Die rechte Seite f hat die Bedeutung einer Quelle bzw. Senke für die diffundierende Größe.

Definition 3.2 (Klassische Lösung)

Eine Funktion[a] $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ bzw. $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, die eine elliptische PDE 2. Ordnung und die gestellten RB punktweise erfüllt, heißt **klassische Lösung**.

[a] $C(\overline{\Omega})$ bedeutet Stetigkeit in Ω und stetige Fortsetzbarkeit auf den Rand; entsprechend $C^1(\overline{\Omega})$

Leider existieren klassische Lösungen nicht immer, z.B.

- bei unstetigen rechten Seiten f oder g,
- bei nicht-glatten Rändern Γ,
- bei wechselnden Randbedingungen.

Abhilfe schaffen wir später in Teil II durch Betrachtung von schwachen Lösungen.

Lösungen elliptischer Gleichungen 2. Ordnung haben folgende Eigenschaften:

- Eine lokale Änderung der rechten Seite f im Gebiet Ω oder in den Randbedingungen g auf Γ führt zu Änderungen in der Lösung u überall.
- Es gilt das Maximumprinzip für die Poisson-Gleichung (Satz 3.3).

Beachte: Numerische Verfahren sollten diese und evtl. weitere Eigenschaften möglichst erhalten!

Satz 3.3 ((Schwaches) Maximumprinzip)

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und

$$L\,u := -\Delta u.$$

Für jede Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt:

$$(L\,u)(x) \leqslant 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x),$$

d.h., u nimmt sein Maximum auf dem Rand Γ an.

Korollar 3.4 (aus dem Maximumprinzip)

Es sei u die klassische Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Falls $f(x) \leqslant 0$ bzw. $f(x) \geqslant 0$ überall in Ω gilt, dann ist auch $u(x) \leqslant 0$ bzw. $u(x) \geqslant 0$ in $\overline{\Omega}$.

Korollar 3.5 (Vergleichsprinzip)

Es seien $v, w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{rl} (L\,v)(x) \leqslant (L\,w)(x) & \text{für alle } x \in \Omega \\ v(x) \leqslant w(x) & \text{für alle } x \in \Gamma \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v(x) \leqslant w(x) \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Mit dem Vergleichsprinzip kann man auch sofort die Eindeutigkeit klassischer Lösungen der Poisson-Gleichung ($*$) beweisen.

Inhalt

Wir betrachten die zeitabhängige parabolische Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0,T) =: Q$$

auf dem Orts-Zeit-Gebiet (-Zylinder) $\Omega \times (0,T)$ mit $T > 0$.[6] Auf dem örtlichen Rand $\Gamma \times (0,T)$ können wir dieselben RB wie im elliptischen Fall stellen, also z.B.

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma \times (0,T).$$

Da die Zeit nur mit erster Ableitung vorkommt, können wir am zeitlichen Rand nur *einen* Satz von Bedingungen vorgeben, z.B. Anfangsbedingungen (AB)[7]

$$u = u_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}.$$

Endbedingungen bei $t = T$ können *nicht* zusätzlich gestellt werden. Da die Kurve/Fläche $t = 0$ eine Charakteristik ist, wäre auch eine zusätzliche (beliebige) Vorgabe von $u_t = v_0$ auf $\Omega \times \{0\}$ nicht erlaubt, denn diese würde die Kompabilitätsbedingung $v_0 = \Delta u_0 + f(\cdot, 0)$ erfordern, wäre also nicht frei wählbar.

[6] Wir ändern also im zeitabhängigen Fall unsere Notation für den Definitionsbereich von Ω auf $\Omega \times (0,T)$.

[7] Alternative: periodische RB

Wie bereits erwähnt, sind parabolische Gleichungen Modelle für Diffusionsprozesse, bei denen Ausgleichsvorgänge aufgrund von örtlichen Gradienten stattfinden, z.B. für die Temperatur, Stoffkonzentrationen etc.

Definition 3.6 (Klassische Lösung)

Eine Funktion u in $\overline{Q}$, die eine parabolische PDE 2. Ordnung und die gestellten RB und AB punktweise erfüllt, heißt **klassische Lösung**. Dazu muss u alle benötigten stetigen Ableitungen in $\Omega \times (0, T)$ besitzen, und die Werte bzw. die (Normalen)-Ableitung muss stetig auf den Rand $\Gamma \times (0, T)$ bzw. $\Omega \times \{0\}$ fortsetzbar sein, sodass die Rand- und Anfangsbedingungen auswertbar sind.

Lösungen parabolischer Gleichungen 2. Ordnung besitzen folgende Eigenschaften:

- Eine lokale Änderung der rechten Seite f im Gebiet oder in den Randbedingungen g führt zu Änderungen in der Lösung u überall im Ort, aber nur zu späteren Zeiten. (Dies kann als unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit gedeutet werden.)
- Nicht-glatte Anfangsdaten werden sofort (in beliebig kurzer Zeit) ausgeglättet.
- Die thermische Energie bzw. Stoffmenge (bis auf Konstanten)

$$\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x$$

  bleibt bei RB $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ und rechter Seite $f = 0$ zu jedem Zeitpunkt erhalten.
- Es gilt das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung (Satz 3.7).

Satz 3.7 ((Schwaches) parabolisches Maximumprinzip)

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$ und

$$L\,u := u_t - \Delta u.$$

Für jede Funktion $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ gilt:

$$(L\,u)(x,t) \leqslant 0 \quad \text{für alle } (x,t) \in Q \quad \Rightarrow \quad \max_{(x,t)\in\overline{Q}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial_p Q} u(x,t),$$

wobei $\partial_p Q$ den „parabolischen Rand“

$$\partial_p Q = \{(x,t) \in \overline{Q} : x \in \Gamma \text{ oder } t = 0\}$$

bezeichnet.

Korollar 3.8 (aus dem Maximumprinzip)

Es sei u eine klassische Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } Q \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \times (0,T) \\ u &= u_0 && \text{in } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Falls $f(x,t) \leqslant 0$ und $u_0(x) \leqslant 0$ bzw. $f(x,t) \geqslant 0$ und $u_0(x) \geqslant 0$ überall in Q und Ω gelten, dann ist auch $u(x,t) \leqslant 0$ bzw. $u(x,t) \geqslant 0$ in $\overline{Q}$. Insbesondere für $f \equiv 0$ gilt

$$u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{in } \Omega \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{x \in \overline{\Omega}} u_0(x) \quad \text{in } Q.$$

Beachte: Numerische Verfahren sollten diese Eigenschaften möglichst erhalten!

Inhalt

Wir betrachten als Beispiel die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T) = Q.$$

Weder der örtliche noch der zeitliche Rand ist eine Charakteristik. Auf dem örtlichen Rand $\Gamma \times (0, T)$ können wir dieselben RB wie im elliptischen Fall stellen. Da nun auch zweite Ableitungen bzgl. der Zeit auftreten, benötigen wir zwei Bedingungen bzgl. der Zeit, etwa

$$u = u_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}, \qquad u_t = v_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}.$$

Dies entspricht der Vorgabe von Anfangsposition und -geschwindigkeit einer schwingenden Saite (falls $\Omega \subset \mathbb{R}$) bzw. schwingenden Membran ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$).

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ (ohne Randbedingungen) kann die Lösung von

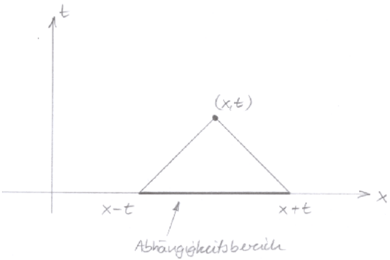
$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= v_0(x) && \text{in } \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.1}$$

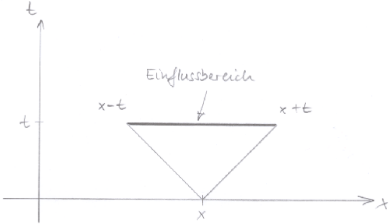
über die **d'Alembertsche Formel** direkt angegeben werden:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u_0(x+t) + u_0(x-t)\big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

Daraus erkennt man:

- Die Lösung von (3.1) in einem Punkt (x,t) hängt nur von den Werten von u_0 und v_0 ab, die im Interval $[x-t, x+t]$ liegen. Dieser **Abhängigkeitsbereich** ist durch die Charakteristiken begrenzt.
- Die Anfangsinformation $u_0(x)$ und $v_0(x)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ beeinflusst die Lösung zur Zeit $t > 0$ nur im Intervall $[x-t, x+t]$ (**Einflussbereich**).





- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist (im Unterschied zu parabolischen Aufgaben) endlich.

- Nicht-glatte Anfangs- oder Randdaten werden entlang der Charakteristiken weitertransportiert.
- Die Gesamtenergie (kinetische plus potentielle) einer schwingenden Saite

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x$$

  bleibt bei RB $u = 0$ (feste Einspannung) und rechter Seite $f = 0$ zu jedem Zeitpunkt erhalten.

Beachte: Numerische Verfahren sollten diese Eigenschaften möglichst erhalten!

Ist die Wellengleichung auf einem beschränkten Ortsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gestellt, kommen noch Randbedingungen hinzu. Diese reflektieren Information, sodass die Lösungsdarstellung (3.2) komplizierter wird.

Inhalt

Analytische Lösungen sind nur

- für wenige PDEs und
- auf einfachen Gebieten Ω

bekannt.

Deswegen greift man zu numerischen Lösungsverfahren, die Näherungslösungen liefern. Wir werden zwei große Klassen numerischer Lösungsverfahren besprechen:

(1) Die **Finite-Differenzen-Methode (FDM)** oder **-Verfahren (FDV)** oder schlicht **finite Differenzen (FD)**,

(2) die **Finite-Elemente-Methode (FEM)** oder **-Verfahren (FEV)** oder schlicht **finite Elemente (FE)**.

Der Schwerpunkt liegt dabei auf der FEM, die deutlich flexibler und weiter entwickelt ist.

Nicht besprochen werden die

- **Finite-Volumen-Methode** sowie
- **Spektralverfahren**.

Ausblick

Fragestellungen

Beide o.g. Verfahrensarten verwenden eine Diskretisierung des zugrunde liegenden Gebietes Ω bzw. $\Omega \times (0, T)$. Wir interessieren uns jeweils für folgende Fragestellungen:

- Was sind geeignete Verfahren für elliptische, parabolische bzw. hyperbolische Aufgaben?
- Wie werden diese praktisch implementiert?
- Wie schnell (bzgl. der Feinheit der Diskretisierung) konvergieren die Verfahren gegen die Lösung der kontinuierlichen Aufgabe?

Insbesondere für die letzte Frage müssen wir geeignete Normen auf Funktionenräumen einführen.

Definition 4.1 (Norm, Halbnorm)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(a) Eine Abbildung $|\cdot| : V \to [0,\infty)$ heißt eine **Seminorm** oder **Halbnorm** auf V, wenn gilt:

$$|\lambda\, v| = |\lambda||v| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$$
$$|u+v| \leqslant |u| + |v| \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

(b) Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heißt **Norm** auf V, wenn sie eine Halbnorm ist und zusätzlich gilt:

$$\|u\| = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Beispiel 4.2 (Normen und Seminormen)

Beispiele sind

(a) die L^2-Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|u\|_0$$

(b) die H^1-Halbnorm

$$|u|_1 := \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}$$

(c) die H^1-Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|u\|_1 = \left(\|u\|_0^2 + |u|_1^2\right)^{1/2}$$

(d) die L^∞-Norm (Norm der gleichmäßigen Konvergenz)

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$$

jeweils auf geeigneten Vektorräumen V.