

## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/17

### 5. Übung: Runge-Kutta Verfahren (RKV)

#### Aufgabe 1

Eine einfache Klasse von Einschrittverfahren für Differentialgleichungen  $y = f(t, y)$  sind die sogenannten  $\theta$ -Methoden mit Parameter  $\theta \in [0, 1]$ :

$$y_{n+1} = y_n + h [(1 - \theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad n = 0, 1, \dots$$

- Welche bekannten Methoden erhält man für  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$  und  $\theta = \frac{1}{2}$ ?
- Weisen Sie nach, dass das  $\theta$ -Verfahren für alle  $\theta \in [0, 1]$  konvergent ist und bestimmen Sie die Konsistenzordnung in Abhängigkeit von  $\theta$ .
- Bestimmen Sie  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , so dass das  $\theta$ -Verfahren für  $\theta \in [\alpha, \beta]$  A-stabil ist.
- Die  $\theta$ -Methode ist insbesondere ein 2-stufiges RKV. Ermitteln Sie die entsprechenden  $c, b$  und  $A$  der zugehörigen Butcher-Matrix:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$$

#### Aufgabe 2

Implementieren Sie in MATLAB die RKV zu den folgenden Butcher-Matrizen:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & & 1/2 & \\ 1 & & & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Welche Namen tragen diese Verfahren? Wenden Sie die vier Verfahren auf das Problem  $y'(t) = ty(t)$ ,  $y(0)$  im Zeitintervall  $[0, 2]$  mit Schrittweite  $h = 0.2$  an. Vergleichen Sie die Approximationen mit der exakten Lösung  $y(t) = \exp(t^2/2)$ . Was beobachten Sie?

#### Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Butcher-Matrix für ein explizites, dreistufiges RKV der Ordnung 3 mit  $\beta_2 = \beta_3$  und  $\gamma_2 = \gamma_3$  und testen Sie die Konsistenzordnung des erhaltenen Verfahrens numerisch in MATLAB anhand des Beispiels aus Aufgabe 2. Dieses Verfahren wird übrigens auch *Nyströms Verfahren 3. Ordnung* genannt.

#### Aufgabe 4

Schreiben Sie in MATLAB eine Routine, welche für ein RKV gegeben durch die Butcher-Matrix-Komponenten  $b, A, c$  die notwendigen Ordnungsbedingungen abprüft und die entsprechende Konsistenzordnung zurückgibt. Wenden Sie diese Routine auf das klassische RKV an.