

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/17

2. Übung: Einschrittverfahren

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Näherungen $\mathbf{y}_n(h)$ des verbesserten Euler-Verfahrens (Folie 101) die folgende Beziehung erfüllen

$$\max_{0 \leq n \leq N(h)} \|\mathbf{y}_n(h) - \mathbf{y}(t_n)\| = \mathcal{O}(h^2) \quad (h \rightarrow 0).$$

Weisen Sie die unterschiedlichen Konvergenzraten des expliziten und verbesserten Eulerverfahrens am Beispiel der logistischen Gleichung von Folie 97 der Vorlesung in MATLAB rechnerisch nach.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Bedingungen (V_1) und (V_2) für die Beispiele 2 und 4 aus Abschnitt 2.2 der Vorlesung erfüllt sind.

Aufgabe 3

Die Verfahren

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n + 0.5h, 0.5(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1})) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})) \quad (2)$$

heißen *Mittelpunktsregel* bzw. *Trapezregel*. Warum? Sind diese Verfahren konsistent und stabil?

Aufgabe 4

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r > 0.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Problems und zeigen Sie, dass für diese die Euklidische Norm $\|\mathbf{y}(t)\|_2$ konstant bleibt.

(b) Bestimmen Sie Näherungslösungen mittels

- des expliziten Euler-Verfahrens,
- des impliziten Euler-Verfahrens,
- der Trapezregel

in MATLAB.

(c) Wie verhalten sich die Folgen $\{\|\mathbf{y}_n\|_2\}_{n \geq 0}$, die von den drei Einschrittverfahren aus b) erzeugt werden? Weisen Sie das beobachtete Verhalten analytisch nach!