

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2016/17

1. Übung: Lineare Differenzengleichungen

Aufgabe 1

Geben Sie eine homogene Differenzengleichung an, welche als Lösung die Folge $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt!

- (a) $y_n = 2^{n-1} - 5^{n+1}$
- (b) $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$
- (c) $y_n = 3 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$
- (d) $y_n = (n+2)5^n$
- (e) $y_n = 1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzengleichungen! Sind Anfangsbedingungen angegeben, so lösen Sie auch das entsprechende Anfangswertproblem.

- (a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + n$
- (b) $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 12x_n = e^n$
- (c) $x_{n+2} - x_n = 2 \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right), \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$
- (d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n, \quad x_1 = x_2 = 0$

Aufgabe 3

Die Tschebyscheff-Polynome erster Art sind definiert als

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

- (a) Zeigen Sie: Die Polynome T_n erfüllen die Rekursionsgleichung

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (2)$$

- (b) Berechnen Sie T_2 und T_3 !
- (c) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung (2) und überprüfen Sie damit Definition (1).