

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2016/17



Mathematik!
TU Chemnitz

① Einleitung

- 1.1 Volterras Prinzip
- 1.2 Begriffe und theoretische Resultate
- 1.3 Lineare Differenzengleichungen
- 1.4 Matrixfunktionen
- 1.5 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung
- 1.6 Die Fälschungen des Han van Meegeren
- 1.7 Weitere Beispiele

② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

- 2.1 Das Euler-Verfahren
- 2.2 Eine Sammlung von Beispielverfahren
- 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
- 2.4 Der Hauptsatz
- 2.5 Einschrittverfahren
- 2.6 Numerische Experimente

③ Lineare Mehrschrittverfahren

- 3.1 Begriffe
- 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren

- 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
- 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
- 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
- 3.6 Absolute Stabilität
- 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
 - 4.1 Konstruktion
 - 4.2 Konsistenzordnung
 - 4.3 Absolute Stabilität
 - 4.4 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren
 - 4.5 Implizite und halb-implizite Verfahren
 - 4.6 Kollokationsmethoden
- ⑤ Steife Differentialgleichungen
 - 5.1 Was sind steife Differentialgleichungen?
 - 5.2 Stabilitätsbegriffe
 - 5.3 Ordnungssterne
 - 5.4 Lineare MSV für steife Probleme

- 5.5 RKV für steife Probleme
- 5.6 Nichtlineare Stabilitätstheorie

6 Ausblick

- 1 Einleitung
- 2 Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- 3 Lineare Mehrschrittverfahren
- 4 Runge-Kutta-Verfahren
- 5 Steife Differentialgleichungen
- 6 Ausblick

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Verfahren der Bauart

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j}, \quad \text{wobei } \mathbf{f}_{n+j} := \mathbf{f}(t_{n+j}, \mathbf{y}_{n+j}), \quad (\text{LMV})$$

heißen **lineare Mehrschrittverfahren**, genauer **lineare k -Schritt-Verfahren**.

- O.B.d.A. sei $\alpha_k = 1$ und $(\alpha_0, \beta_0) \neq (0, 0)$.
- Falls $\beta_k = 0$, ist (LMV) explizit, sonst implizit.
- Bei impliziten Verfahren muss in jedem Zeitschritt ein (i.Allg. nichtlineares) Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{y}_{n+k} = h\beta_k \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} (h\beta_j \mathbf{f}_{n+j} - \alpha_j \mathbf{y}_{n+j}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_{n+k}) + \mathbf{c}$$

gelöst werden. Wegen

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{v}) - \mathbf{g}(\mathbf{w})\| = h|\beta_k| \|\mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{w})\| \leq h|\beta_k| L \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

besitzt dies eine eindeutige Lösung, wenn $h|\beta_k| L < 1$, die mit **Fixpunktiteration** bestimmt werden kann.

Das Polynom

$$\sigma(\zeta) := \beta_0 + \beta_1\zeta + \cdots + \beta_k\zeta^k \in \mathcal{P}_k$$

heißt **zweites charakteristisches Polynom** von (LMV) und

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}(t); h) := \sum_{j=0}^k [\alpha_j \mathbf{z}(t + jh) - h\beta_j \mathbf{z}'(t + jh)], \quad \mathbf{z} \in C^1(I)$$

der mit (LMV) assoziierte **Differenzenoperator**.

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lemma 3.1

Ist z genügend oft differenzierbar, so gilt

$$\mathcal{L}(z(t); h) = C_0 z(t) + C_1 z'(t)h + \dots + C_q z^{(q)}(t)h^q + \dots$$

$$\text{mit } C_0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j = \rho(1), \quad C_1 = \sum_{j=0}^k [j\alpha_j - \beta_j] = \rho'(1) - \sigma(1)$$

$$\text{und } C_q = \sum_{j=0}^k \left[\frac{j^q}{q!} \alpha_j - \frac{j^{q-1}}{(q-1)!} \beta_j \right] \quad (q = 2, 3, \dots).$$

Für die Koeffizienten der analogen Entwicklung

$$\mathcal{L}(z(t + \tau h); h) = \sum_{j=0}^{\infty} D_j z^{(j)}(t + \tau h) h^j$$

$$\text{gelten } C_q = \sum_{j=0}^q \frac{\tau^j}{j!} D_{q-j} \quad (q = 0, 1, \dots).$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Konsistenzordnung

- Der lineare Differenzenoperator \mathcal{L} entspricht im Wesentlichen dem bekannten Residuum: $\mathbf{R}_{n+k} = \mathcal{L}(\mathbf{y}(t_n); h)$.
- Das lineare Mehrschrittverfahren (LMV) besitzt die genaue **Konsistenzordnung** p , wenn

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \quad \text{und} \quad C_{p+1} \neq 0$$

gelten. Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.1 ist das äquivalent zu

$$D_0 = D_1 = \dots = D_p = 0 \quad \text{und} \quad D_{p+1} \neq 0.$$

C_{p+1} ($= D_{p+1}$) heißt dann die **Fehlerkonstante** des Verfahrens.

- Beachte, dass (LMV) genau dann konsistent ist (mit anderen Worten: seine Konsistenzordnung beträgt mindestens $p = 1$), wenn $\rho(1) = 0$ und $\rho'(1) = \sigma(1)$ erfüllt sind.
- (LMV) ist damit genau dann konvergent, wenn ρ die Wurzelbedingung erfüllt und $\rho(1) = 0$ sowie $\rho'(1) = \sigma(1)$ gelten (was insbesondere $\rho'(1) = \sigma(1) \neq 0$ impliziert).

Satz 3.2

Für jedes lineare k -Schritt-Verfahren sind die folgenden fünf Aussagen äquivalent:

- (a) Das k -Schritt-Verfahren besitzt (mindestens) die Konsistenzordnung p .
- (b) $q! C_q = \sum_{j=0}^k [j^q \alpha_j - q j^{q-1} \beta_j] = 0 \quad (q = 0, 1, \dots, p)$.
- (c) Das k -Schritt-Verfahren ist konsistent mit $y' = y$, $y(0) = 1$, von (mindestens) der Ordnung p .
- (d) Die Funktion

$$\frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} - \sigma(\zeta)$$

hat in $\zeta = 1$ eine (mindestens) p -fache Nullstelle.

- (e) $\mathcal{L}(z(t); h) = 0$ für alle Polynome $z \in \mathcal{P}_p$.

Nach der Definition der Fehlerkonstanten C_{p+1} eines LMV wissen wir lediglich dass

$$\mathcal{L}(y(t_n); h) = h^{p+1} C_{p+1} y^{(p+1)}(t_n) + O(h^{p+2}) \quad (h \rightarrow 0).$$

Die Frage, wann auch eine Darstellung der Form $\mathcal{L}(y(t_n); h) = h^{p+1} C_{p+1} y^{(p+1)}(\xi)$ mit $t_n \leq \xi \leq t_n + h$ möglich ist, führt auf die Darstellung mittels **Peano-Kern**.

Lemma 3.3

Das lineare k -Schritt-Verfahren (**LMV**) zur Lösung von (**AWP**) besitze die Konsistenzordnung p . Für Funktionen $\mathbf{y} \in C^{(p+1)}(I)$ gilt

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t); h) = h^{p+1} \int_0^k G(\tau) \mathbf{y}^{(p+1)}(t + \tau h) d\tau \quad (3.1)$$

schreiben mit der **Peano-Kernfunktion**

$$G(\tau) = \sum_{j=0}^k \left[\alpha_j \frac{(j - \tau)_+^p}{p!} - \beta_j \frac{(j - \tau)_+^{p-1}}{(p-1)!} \right], \quad u_+^k := \max\{0, u\}^k.$$

Bemerkungen:

- (1) Durch früheres Abbrechen der Taylor-Reihen im Beweis von Lemma 3.3 erhält man entsprechende Darstellungen

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t); h) = h^{q+1} \int_0^k G_q(\tau) \mathbf{y}^{(q+1)}(t + \tau h) d\tau, \quad 1 \leq q \leq p$$

mit

$$G_q(\tau) = \sum_{j=0}^k \left[\alpha_j \frac{(j - \tau)_+^q}{q!} - \beta_j \frac{(j - \tau)_+^{q-1}}{(q-1)!} \right].$$

- (2) $G_q(\tau) = 0$ für $\tau \in \mathbb{R} \setminus (0, k)$.
- (3) G_q ist $(q-2)$ -mal stetig differenzierbar und $G'_q(\tau) = -G_{q-1}(\tau)$ (für $q = 2$ stückweise zu verstehen).
- (4) $G_1(s)$ ist stückweise linear mit Sprüngen der Höhe β_j an den Stellen $\tau_j = j$, $j = 0, \dots, k$ und Steigung $-(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_k)$ im Intervall $(j, j+1)$.

Satz 3.4

Für den Differenzenoperator eines LMV der Konsistenzordnung p und $y \in C^{(p+1)}(I)$ gilt

$$|\mathcal{L}(y(t_n); h)| \leq h^{p+1} G Y$$

mit $Y := \max_{t \in I} |y^{(p+1)}(t)|$ sowie, falls der Peano-Kern $G(\tau)$ das Vorzeichen in $[0, k]$ nicht wechselt,

$$G = |C_{p+1}| = \left| \int_0^k G(\tau) \, d\tau \right|$$

und andernfalls

$$G = \int_0^k |G(\tau)| \, d\tau.$$

LMV ohne Vorzeichenwechsel des Peano-Kerns sind beispielsweise die Familie der Adams-Bashforth bzw. Adams-Moulton Verfahren.

Satz 3.4 erlaubt Abschätzungen des lokalen Diskretisierungsfehlers:

Beispiel: Für das stabile Zweischrittverfahren

$$\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} = \frac{h}{12}(5\mathbf{f}_{n+2} + 8\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_n) \quad (3.2)$$

der Konsistenzordnung 3 ($C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -1/24$) erhalten wir

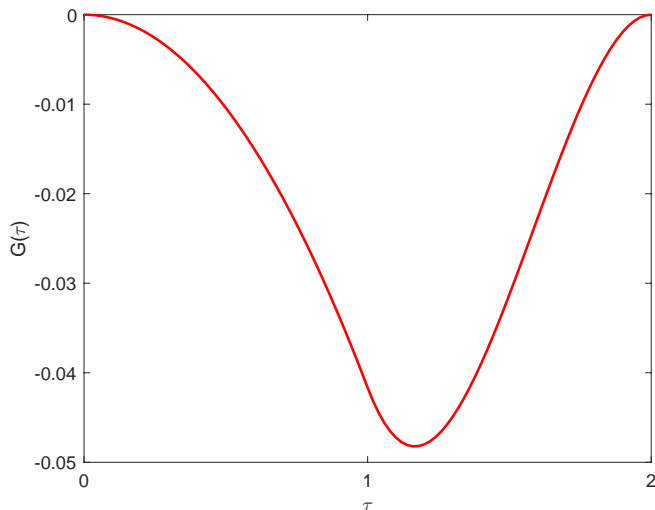
$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{1}{24}(0 - \tau)_+^2 - \frac{1}{6}(1 - \tau)_+^3 - \frac{3}{4}(1 - \tau)_+^2 + \frac{1}{6}(2 - \tau)_+^3 - \frac{5}{24}(2 - \tau)_+^2 \\ &= \begin{cases} -\frac{\tau^2}{24} & 0 \leq \tau \leq 1, \\ -\frac{1}{6}\tau^3 + \frac{19}{24}\tau^2 - \frac{7}{6}\tau + \frac{1}{2} & 1 \leq \tau \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft gilt $G(\tau) \leq 0$ für $\tau \in [0, 2]$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, Beispiel

Peano-Kern $G(\tau)$ des Verfahrens (3.2):



Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, Beispiel

Ist $y \in C^4(I)$, so gilt nach Satz 3.4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} R_{n+2} \right| &= \left| \frac{1}{h} \mathcal{L}(y(t_n); h) \right| = h^3 \left| \int_0^2 G(\tau) y^{(4)}(t_n + \tau h) d\tau \right| \\ &\leq h^3 |C_4| \max_{t \in I} |y^{(4)}(t)| = \frac{h^3}{24} \max_{t \in I} |y^{(4)}(t)|. \end{aligned}$$

Alternativ folgt mit der **Hölder-Ungleichung**

$$\left| \frac{1}{h} R_{n+2} \right| \leq h^3 \left[\int_0^2 |G(\tau)|^\mu d\tau \right]^{1/\mu} \left[\int_0^2 |y^{(4)}(t_n + \tau h)|^\nu d\tau \right]^{1/\nu},$$

falls $1/\mu + 1/\nu = 1$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, Beispiel

Für $\mu = 1$, $\nu = \infty$ ergibt sich (entspricht Satz 3.4)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} R_{n+2} \right| &\leq -h^3 \left[\int_0^2 G(\tau) d\tau \right] \max_{t_n \leq t \leq t_n + 2h} |y^{(4)}(t)| \\ &= \frac{h^3}{24} \max_{t_n \leq t \leq t_n + 2h} |y^{(4)}(t)| \end{aligned}$$

sowie für $\mu = \infty$, $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} R_{n+2} \right| &\leq h^3 \max_{0 \leq \tau \leq 2} |G(\tau)| \left[\int_0^2 |y^{(4)}(t_n + \tau h)| d\tau \right] \\ &= \frac{125}{2592} h^3 \int_0^2 |y^{(4)}(t_n + \tau h)| d\tau. \end{aligned}$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, globaler Fehler

Mit Hilfe von Satz 3.4 kann man auch Abschätzungen für den globalen Diskretisierungsfehler angeben. Sei

$$e_n := y(t_n) - \tilde{y}_n, \quad \tilde{y}_n = \tilde{y}_n(h),$$

wobei die Folge $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die durch Rundungsfehler gestörte Differenzengleichung

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \tilde{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n+j}, \tilde{y}_{n+j}) + \underbrace{\vartheta_n K h^{q+1}}_{\text{lokaler Rundungsfehler}}, \quad \|\vartheta_n\|_\infty \leq 1$$

erfüllt. Wir setzen

$$A := \sum_{j=0}^k |\alpha_j|, \quad B := \sum_{j=0}^k |\beta_j|.$$

sowie für den Fehler der Startwerte

$$E := \max_{0 \leq j \leq k-1} \|e_j\|.$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, globaler Fehler

Bezeichnet $(\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe

$$\frac{1}{\zeta^k \rho(\zeta^{-1})} = \frac{1}{\alpha_k + \alpha_{k-1}\zeta + \cdots + \alpha_0 \zeta^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \zeta^j,$$

so gilt, sofern ρ die Wurzelbedingung erfüllt ist,

$$\Gamma := \sup_{j \geq 0} |\gamma_j| < \infty.$$

Wir setzen ferner

$$\Gamma^* := \frac{\Gamma}{1 - h|\beta_k|L}$$

mit der Lipschitz-Konstanten L der rechten Seite $f(t, \mathbf{y})$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Peano-Kern, globaler Fehler

Unter der Annahme, dass

$$h|\beta_k|L < 1 \quad (3.3)$$

lässt sich dann zeigen¹⁷, dass

$$\|e_n\| \leq \Gamma^* [kAE + (t_n - t_0)(\frac{1}{h}\mathcal{L}(\mathbf{y}(t_n); h) + h^q K)] \exp(\Gamma^* BL(t_n - t_0)).$$

Mit Hilfe der Peano-Kern-Darstellung für den lokalen Fehler $\mathcal{L}(\mathbf{y}(t_n); h)$ aus Satz 3.4 ergibt sich

$$\|e_n\| \leq \Gamma^* [kAE + (t_n - t_0)(h^p GY + h^q K)] \exp(\Gamma^* BL(t_n - t_0)). \quad (3.4)$$

Details in [Lambert, 1991; §3.6], [Henrici, 1962; §5.3–4] .

¹⁷Hier wird wie schon in Kapitel 2 auf die Lösungsdarstellung für inhomogene lineare Differenzengleichungen zurückgegriffen.

Lineare Mehrschrittverfahren

Bemerkungen

- (1) (3.3) ist für explizite LMV stets erfüllt, für implizite ist es eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit der Verfahrensgleichung.
- (2) (3.4) zeigt den Einfluss von lokalem Fehler, Startfehler und Rundfehler; Insbesondere implizieren $E = O(h^p)$, Konsistenzordnung p sowie $q \geq p$ für den Gesamtfehler $\|e_n\| = O(h^p)$.
- (3) Für den Startfehler findet keine Fehlerakkumulation statt, d.h. für die Anlaufrechnung genügt ein Verfahren der Konsistenzordnung $p - 1$.
- (4) Das Rundungsfehlermodell Kh^{q+1} ist unrealistisch; wir beobachten jedoch, dass man eine h -Potenz beim Übergang zum globalen Fehler verliert. Realistischer wäre eine absolute Schranke ϵ für den (lokalen) Rundungsfehler, was im globalen auf einen Anteil $\sim \epsilon/h$ führt. (Konsequenz?)
- (5) Ist die Wurzelbedingung nicht erfüllt, so ist Γ nicht endlich.
- (6) (3.4) fördert das Verständnis der Fehlerentwicklung, ist in der Praxis aber kaum von Nutzen. Obwohl die einzelnen Terme – zumindest a posteriori – geschätzt werden können, wird der globale Fehler durch (3.4) oft stark überschätzt.

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

- Was ist die maximale Ordnung eines **konvergenten** linearen k -Schritt-Verfahrens?
- $2k + 2$ freie Parameter $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^k$,
 $2k + 1$ nach Normierung, $2k$ für ein explizites Verfahren.
- Konsistenz der Ordnung p führt auf $p + 1$ homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten. Bis zu welcher Ordnung p liegt auch Stabilität vor? Erste Vermutung: $p = 2k$ [$p = 2k - 1$] im impliziten [expliziten] Fall?
- 1956 beantwortet in

CONVERGENCE AND STABILITY
IN THE NUMERICAL INTEGRATION OF ORDINARY
DIFFERENTIAL EQUATIONS

GERMUND DAHLQUIST

1. Introduction and summary

1.1. Statement of the problem. Consider a class of difference equations

$$(1.1) \quad \alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n),$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Maximale Konsistenzordnung

Nach Satz 3.2 ist die Konsistenzordnung eines LMV von mindestens p äquivalent damit, dass die Funktion

$$\varphi(\zeta) = \frac{\rho(\zeta)}{\log \zeta} - \sigma(\zeta), \quad (|\arg \zeta| < \pi, \log 1 = 0)$$

an der Stelle $\zeta = 1$ eine Nullstelle der Vielfachheit mindestens p besitzt.

Als einfache Folgerung hieraus lässt sich ein zweites charakteristisches Polynom σ bei gegebenem ersten charakteristischem Polynom ρ optimal wählen:

Satz 3.5

Sei $\rho \in \mathcal{P}_k$ mit $\rho(1) = 0$ sowie $\ell \in \{0, 1, \dots, k\}$. Dann gibt es genau ein Polynom $\sigma \in \mathcal{P}_\ell$ sodass das zugehörige LMV die Konsistenzordnung mindestens ℓ besitzt.

Von praktischem Interesse lediglich

$\ell = k - 1$	führt auf bestmögliches explizites Verfahren,
$\ell = k$	" " implizites " .

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

Ausgangspunkt der Analyse der maximalen Konsistenzordnung eines stabilen LMV sind wieder dessen charakteristischen Polynome $\rho(\zeta)$ und $\sigma(\zeta)$. Folgende Variablensubstitution ist hierbei hilfreich:

$$\zeta = \frac{z+1}{z-1}, \quad z = \frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \quad (3.5)$$

sowie die hierdurch bestimmten Polynome

$$R(z) = \left(\frac{z-1}{2} \right)^k \rho(\zeta) = \sum_{j=0}^k a_j z^j, \quad S(z) = \left(\frac{z-1}{2} \right)^k \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^k b_j z^j.$$

Lemma 3.6

Für ein stabiles LMV mit mindestens Konsistenzordnung $p = 0$ gilt

- (a) $a_k = 0$ sowie $a_{k-1} = 2^{1-k} \rho'(1) \neq 0$.
- (b) Alle von Null verschiedenen Koeffizienten von $R(z)$ besitzen das gleiche Vorzeichen.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

Lemma 3.7

Ein LMV besitzt genau dann die Konsistenzordnung p , wenn

$$R(z) \left(\log \frac{z+1}{z-1} \right)^{-1} - S(z) = C_{p+1} \left(\frac{2}{z} \right)^{p-k} + O \left(\left(\frac{2}{z} \right)^{p-k+1} \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Lemma 3.8

Für die Koeffizienten der Laurent-Reihe

$$\left(\log \frac{z+1}{z-1} \right)^{-1} = \frac{z}{2} - \frac{\mu_1}{z} - \frac{\mu_3}{z^3} - \frac{\mu_5}{z^5} - \dots \quad (3.7)$$

gilt $\mu_{2j+1} > 0$ für alle $j \geq 0$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

Satz 3.9 (Dahlquist-Barriere)

Für die Konsistenzordnung p eines stabilen linearen k -Schritt-Verfahrens gilt

$$p \leq \begin{cases} k + 2, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k + 1, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ k, & \text{falls } \beta_k / \alpha_k \leq 0. \end{cases}$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

Optimalität bei der Ordnung LMV hat strukturelle Eigenschaften zur Folge:

Satz 3.10

Stabile LMV mit (maximaler) Konsistenzordnung $k + 2$ sind symmetrisch, d.h.

$$\alpha_j = -\alpha_{k-j} \quad \text{und} \quad \beta_j = \beta_{k-j}, \quad j = 0, \dots, k. \quad (3.8)$$

Beachte: Bei (stabilen) symmetrischen LMV gilt $\rho(\zeta) = -\zeta^k \rho(1/\zeta)$. Mit ζ ist somit auch $1/\zeta$ Nullstelle von ρ , d.h. alle Nullstellen von ρ liegen auf dem Einheitskreis und sind somit einfach.

Korollar 3.11

Ist k gerade, dann ist ein stabiles lineares k -Schritt-Verfahren mit optimaler Konsistenzordnung $k + 2$ nur **schwach stabil**, d.h. alle Nullstellen des ersten charakteristischen Polynoms haben Betrag 1.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

(Jedes) stabile k -Schritt-Verfahren ($k = 2\ell$) mit Konsistenzordnung $k+2$ kann man wie folgt konstruieren:

(1) Setze

$$\rho(\zeta) := (\zeta - 1)(\zeta + 1) \prod_{j=1}^{(k-2)/2} (\zeta - \zeta_j)(\zeta - \bar{\zeta}_j)$$

mit paarweise verschiedenen ζ_j , $|\zeta_j| = 1$, $\operatorname{Im} \zeta_j > 0$.

(2) Bestimme die ersten Koeffizienten der Taylor-Entwicklung

$$\frac{\left(\frac{z-1}{2}\right)^k \rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}{\log \frac{z+1}{z-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \quad \text{und setze} \quad S(z) := \sum_{j=0}^k b_j z^j.$$

(3) Setze

$$\sigma(\zeta) := (\zeta - 1)^k S\left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right).$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Die erste Dahlquist-Barriere

- Das einzige stabile Zweischnittverfahren der Ordnung 4 ist die **Simpson-Regel**¹⁸

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

- Für $k = 4$ ist z.B.

$$y_{n+4} - y_n = \frac{h}{90}(56f_{n+4} - 31f_{n+3} + 96f_{n+2} - 31f_{n+1} + 56f_n)$$

ein stabiles Verfahren der Ordnung 6.

- In der Praxis spielen diese Beispiele (wie alle linearen 2ℓ -Schritt-Verfahren der Ordnung $2\ell + 2$) keine Rolle (vgl. dazu Abschnitt 6).

¹⁸Thomas Simpson (1710–1761)

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton

Die Idee der **Adams-Bashforth-Verfahren**¹⁹:

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{y}'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt.$$

Ersetze $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ durch ein Polynom $\mathbf{q}_{k-1}(t) \in \mathcal{P}_{k-1}$, das die k Datenpaare

$$(t_n, \mathbf{f}_n), (t_{n-1}, \mathbf{f}_{n-1}), \dots, (t_{n-k+1}, \mathbf{f}_{n-k+1})$$

interpoliert. In der Lagrange²⁰-Darstellung ist dieses durch

$$\mathbf{q}_{k-1}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{f}_{n-j} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{k-1} \frac{t - t_{n-\ell}}{t_{n-j} - t_{n-\ell}}$$

gegeben.

¹⁹ John Couch Adams (1819–1892), Francis Bashforth, 1819–1912)

²⁰ Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton

k -te Adams-Bashforth-Formel

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} \mathbf{f}_{n-j} \quad (\text{A-B})$$

$$\text{mit } \beta_{k,j} = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{k-1} \frac{t - t_{n-\ell}}{t_{n-j} - t_{n-\ell}} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{k-1} \frac{s + \ell}{\ell - j} ds.$$

Die **Adams-Moulton-Verfahren**²¹ konstruiert man fast genauso. Der einzige Unterschied besteht darin, dass ein Interpolationspolynom q_k vom Grad k zu den $(k+1)$ Daten

$$(t_{n+1}, \mathbf{f}_{n+1}), (t_n, \mathbf{f}_n), (t_{n-1}, \mathbf{f}_{n-1}), \dots, (t_{n-k+1}, \mathbf{f}_{n-k+1})$$

als Approximation an $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ verwendet wird.

²¹Forest Ray Moulton (1872–1952),

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton

k -te Adams-Moulton-Formel:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{j=0}^k \beta_{k,j}^* \mathbf{f}_{n+1-j} \quad \text{mit} \quad \beta_{k,j}^* = \int_{-1}^0 \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^k \frac{s + \ell}{\ell - j} ds. \quad (\text{A-M})$$

Satz 3.12

Das Adams-Bashforth-Verfahren (A-B) ist ein explizites lineares k -Schritt-Verfahren. Es ist stabil und besitzt die Konsistenzordnung k .

Das Adams-Moulton-Verfahren (A-M) ist ein implizites lineares k -Schritt-Verfahren. Es ist stabil und besitzt die Konsistenzordnung $k + 1$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton

Koeffizienten für Adams-Bashforth-Verfahren:

k						
1	1					
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$			
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$		
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$	
6	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{9982}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{475}{1440}$

Beispielsweise ist

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(3\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1})$$

das Adams-Bashforth-Verfahren für $k = 2$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton

Koeffizienten für Adams-Moulton-Verfahren:

k							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$				
3	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$			
4	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$		
5	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$	
6	$\frac{19087}{60480}$	$\frac{65112}{60480}$	$-\frac{46461}{60480}$	$\frac{37504}{60480}$	$-\frac{20211}{60480}$	$\frac{6312}{60480}$	$-\frac{863}{60480}$

Beispielsweise ist

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n) \quad (\text{Trapezregel})$$

das Adams-Moulton-Verfahren für $k = 1$ und

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{12}(5\mathbf{f}_{n+1} + 8\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{n-1})$$

das für $k = 2$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Die Verfahren von Nyström und Milne-Simpson

Natürlich kann man auch in

$$\mathbf{y}(t_{n+k}) - \mathbf{y}(t_{n+k-\ell}) = \int_{t_{n+k-\ell}}^{t_{n+k}} \mathbf{y}'(t) dt = \int_{t_{n+k-\ell}}^{t_{n+k}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt$$

($\ell = 1, 2, \dots$) den Integrand durch ein Interpolationspolynom ersetzen, um lineare Mehrschrittverfahren zu konstruieren. (Für $\ell = 1$ ergeben sich die Adams-Formeln.) Für $\ell = 2$ erhält man so die expliziten **Nyström-Verfahren**, z.B. die **Mittelpunktsregel**

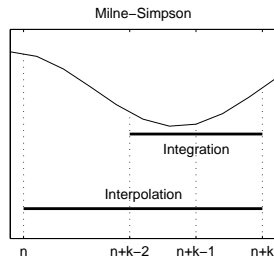
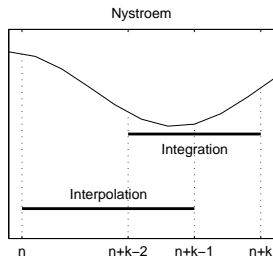
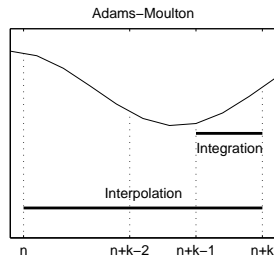
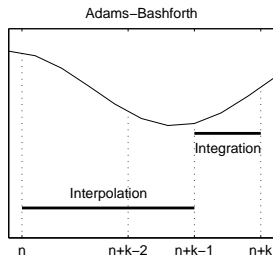
$$\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_n = 2h\mathbf{f}_{n+1},$$

bzw. die impliziten **Milne-Simpson-Verfahren**, wie etwa die **Simpson-Regel**

$$\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_n = \frac{h}{3} (\mathbf{f}_{n+2} + 4\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n).$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Interpolation und Integration bei den Adams-artigen LMV



- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lineare Mehrschrittverfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Löst man ein AWP durch ein implizites Mehrschrittverfahren, so muss in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{y}_{n+k} = h\beta_k \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k}) + \mathbf{c}$$

(vgl. Abschnitt 1) gelöst werden. Ist $h|\beta_k|L < 1$, so konvergiert die Fixpunktiteration

$$\mathbf{y}_{n+k}^{(\nu)} = h\beta_k \mathbf{f}(t_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k}^{(\nu-1)}) + \mathbf{c} \quad \nu = 1, 2, \dots$$

gegen die (eindeutige) Lösung. Einen Startwert $\mathbf{y}_{n+k}^{(0)}$ kann man mit einem expliziten Verfahren berechnen. Man verwendet dazu ein Verfahren gleicher Ordnung.

Lineare Mehrschrittverfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Kombiniert man etwa die $(k + 1)$ -te Adams-Bashforth-Formel (Prädiktor) mit der k -ten Adams-Moulton-Formel (Korrektor), so liest sich ein Zeitschritt des resultierenden **Prädiktor-Korrektor-Verfahrens** wie folgt:

$$(P): \quad \mathbf{y}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{y}_n + h \sum_{j=0}^k \beta_{k+1,j} \mathbf{f}_{n-j},$$

For $\nu = 0, 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(\nu)} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{(\nu)}),$$

$$(K): \quad \mathbf{y}_{n+1}^{(\nu+1)} = \mathbf{y}_n + h \beta_{k,0}^* \mathbf{f}_{n+1}^{(\nu)} + h \sum_{j=1}^k \beta_{k,j}^* \mathbf{f}_{n+1-j}.$$

Man bricht die Iteration (K) ab, wenn $\|\mathbf{y}_{n+1}^{(\nu+1)} - \mathbf{y}_{n+1}^{(\nu)}\|$ „genügend klein“ ist. Dann setzt man $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_{n+1}^{(\nu+1)}$ und (für weitere Zeitschritte) $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{(\nu)}$ (oder alternativ: $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^{(\nu+1)})$).

Lineare Mehrschrittverfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

- In der Praxis kann man so nur selten vorgehen, da völlig unklar ist, wie viele Schritte von (K) durchgeführt werden müssen, um das Abbruchkriterium zu erfüllen. Stattdessen wird man nur eine feste (kleine) Zahl μ von diesen Iterationsschritten durchführen.
- Bezeichnen p bzw. p^* die Konsistenzordnungen von Prädiktor und Korrektor (in unserem Beispiel $p = p^* = k$), dann ist die Konsistenzordnung des zusammengesetzten Verfahrens gleich der des Korrektors, wenn $p \geq p^*$ oder $\mu > p^* - p$ gilt.

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität, einführendes Beispiel

Der Begriff **absolute Stabilität** befasst sich anstelle der Stabilität eines Verfahrens im Grenzwert $h \rightarrow 0$, mit dessen Verhalten für lange Integrationsintervalle bei fester Schrittweite $h > 0$.

Qualitativ: wie klein muss man bei gegebener AWA und gegebenem Verfahren die Schrittweite wählen, damit die numerische Approximation der Lösung sich zumindest qualitativ richtig verhält.

Beispiel 1: Für die AWA

$$y'(t) = -\sin t, \quad y(0) = 1 \quad (3.9)$$

mit Lösung $y(t) = \cos t$ (und $L = 0$) beträgt das Residuum R_{n+1} des expliziten Euler-Verfahrens an der Stelle t_n

$$R_{n+1} = \mathcal{L}(y(t_n); h) = -\frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3) = \frac{h^2}{2} \cos t_n + O(h^3),$$

sodass der globale Fehler für $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ beschränkt ist durch (vgl. Beweis Satz 2.1)

$$\max_{t_0 \leq n h \leq t_{\text{end}}} |e_n| \leq h \max_{t_0 \leq t \leq t_{\text{end}}} |\cos t| = h.$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität, einführendes Beispiel

Für einen Fehler $|e| \leq 10^{-3}$ bei der Integration bis $t_{\text{end}} = 2$ müßte also eine Schrittweite von $h = 10^{-3}$ ausreichen. Man erhält für $N = 2000$

$$y_N = -4.166014 \cdot 10^{-1}, \quad |y(2) - y_N| = 4.547667 \cdot 10^{-4}.$$

Beispiel 2: Wir modifizieren obige AWA zu

$$y'(t) = \lambda(y - \cos t) - \sin t, \quad y(0) = 1 \quad (3.10)$$

mit derselben Lösung $y(t) = \cos t$. Man rufe sich in Erinnerung, dass beim expliziten Euler-Verfahren der globale Fehler der Rekursion

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hL)|e_n| + O(h^2)$$

genügt, mit L der Lipschitz-Konstanten der rechten Seite. Für $\lambda = -10$ erhalten wir nun

$$y_N = -4.170721 \cdot 10^{-1}, \quad |y(2) - y_N| = 1.611611 \cdot 10^{-5}.$$

Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität, einführendes Beispiel

Beispiel 3: Wir betrachten obiges Beispiel für $\lambda = -2100$. In diesem Fall ergibt sich

$$y_N = 1.597768 \cdot 10^{76}, \quad |y(2) - y_N| = 1.452516 \cdot 10^{76}.$$

Verschiedene Schrittweiten für dieses AWP liefern

h	Fehler bei $t_{\text{end}} = 2$
0.001	$1.7e + 76$
0.000976	$3.1e + 36$
0.00095	$8.6e - 04$
0.0008	$7.3e - 04$
0.0004	$3.6e - 04$

Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität

- Bekanntlich streben die Lösungen $\mathbf{y}(t)$ von $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (konstant) gegen $\mathbf{0}$ für $t \rightarrow \infty$, wenn $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von A gilt.
- Wir suchen Bedingungen an ein numerisches Verfahren (zunächst LMV), so dass die Näherungslösungen dasselbe asymptotische Verhalten besitzen.
- Dazu eine Bezeichnung: Seien ρ und σ die charakteristischen Polynome eines LMV; dann heißt

$$\pi(\zeta; \hat{h}) := \rho(\zeta) - \hat{h}\sigma(\zeta), \quad \hat{h} = h\lambda$$

Stabilitätspolynom des Verfahrens.

Lemma 3.13

Es seien $\{y_n\}$ die Näherungen eines linearen k -Schritt-Verfahrens

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}_{n+j} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

zur Lösung von $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ (inkl. Anfangsbedingungen). Bei festem h gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n\| = 0$$

genau dann, wenn alle Nullstellen von $\pi(\zeta; \hat{h}) = \pi(\zeta; h\lambda)$ (als Polynom in ζ betrachtet) betragsmäßig echt kleiner als 1 sind und zwar für jedes $\lambda \in \Lambda(A)$.

Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität

- Das Verfahren heißt **absolut stabil** für \hat{h} , wenn alle Nullstellen ζ von $\pi(\cdot; \hat{h})$ die Beziehung $|\zeta| < 1$ erfüllen.
- Die Menge

$$\mathcal{R}_A := \{\hat{h} \in \mathbb{C} : \pi(\cdot; \hat{h}) \text{ hat nur Nullstellen in } |\zeta| < 1\}$$

heißt **Stabilitätsgebiet** des Verfahrens.

- Das Verfahren heißt **A-stabil** (absolut stabil), wenn \mathcal{R}_A die linke Halbebene $\{\operatorname{Re} \zeta < 0\}$ enthält.

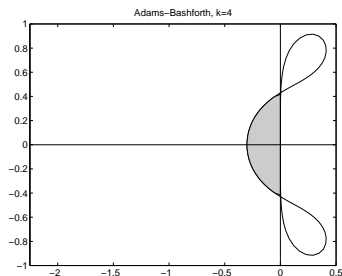
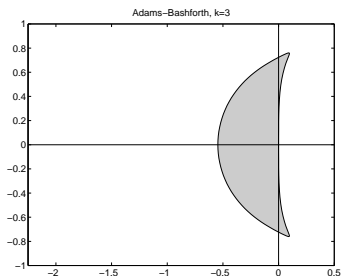
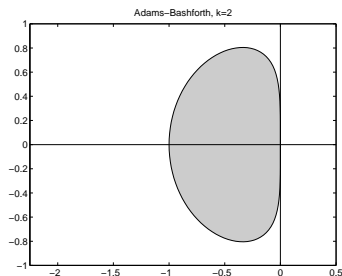
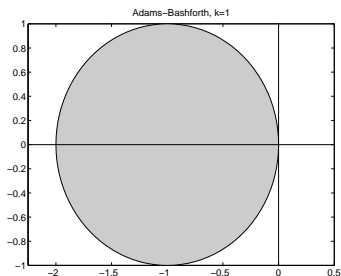
Bemerkungen.

- (1) Für jedes konvergente LMV gibt es ein $\hat{h}_0 > 0$, so dass $\mathcal{R}_A \cap [0, \hat{h}_0] = \emptyset$.
- (2)

$$\partial \mathcal{R}_A \subseteq \left\{ \hat{h} \in \mathbb{C} : \hat{h} = \frac{\rho(e^{i\phi})}{\sigma(e^{i\phi})}, 0 \leq \phi \leq 2\pi \right\}.$$

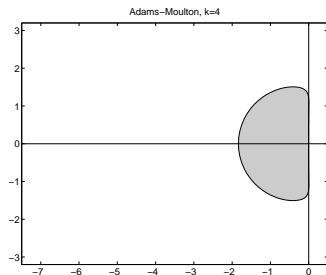
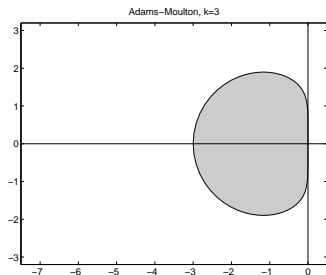
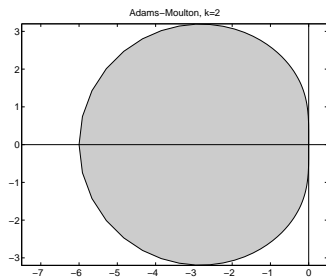
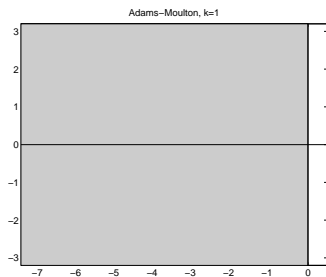
Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität



Lineare Mehrschrittverfahren

Absolute Stabilität



Lineare Mehrschrittverfahren

Zweite Dahlquist-Barriere

Ein LMV mit charakteristischen Polynomen $\rho(\zeta)$ und $\sigma(\zeta)$ heißt **irreduzibel**, falls $\rho(\zeta)$ und $\sigma(\zeta)$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen.

Lemma 3.14

Ist ein lineares Mehrschrittverfahren A-stabil, so gilt

$$\operatorname{Re} \frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)} \geq 0 \quad \text{für } |\zeta| \geq 1. \quad (3.11)$$

Für irreduzible LMV gilt auch die Umkehrung, d.h. (3.11) impliziert A-Stabilität.

Satz 3.15 (Dahlquist, 1963)

Für die Konsistenzordnung p eines A-stabilen LMV gilt $p \leq 2$. Gilt $p = 2$, so gilt für die Fehlerkonstante des Verfahrens $C \leq -\frac{1}{12}$. Die Trapezregel ist das einzige A-stabile LMV mit Fehlerkonstante $C = -\frac{1}{12}$.

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
 - 3.1 Begriffe
 - 3.2 Konsistenzordnung linearer Mehrschrittverfahren
 - 3.3 Die erste Dahlquist-Barriere
 - 3.4 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
 - 3.5 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
 - 3.6 Absolute Stabilität
 - 3.7 BDF-Verfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Lineare Mehrschrittverfahren

BDF-Verfahren

Idee der **BDF-Verfahren** (Backward Differentiation Formulas), oder auch **Gear-Verfahren**²²:

Um eine Näherung für $\mathbf{y}(t_{n+1})$ zu gewinnen, approximieren wir $t \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ durch das Interpolationspolynom $P_k \in \mathcal{P}_k$ mit den $k+1$ Wertepaaren

$$(t_j, \mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j)) = (t_j, \mathbf{f}_j), \quad j = n - k + 1, \dots, n + 1.$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \approx P_k(t) = \sum_{j=0}^k \ell_j \left(\frac{t_{n+1} - t}{h} \right) \mathbf{y}_{n+1-j} \quad \text{mit} \quad \ell_j(t) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^k \frac{t - s}{j - s}.$$

Jetzt approximieren wir $\mathbf{y}'(t_{n+1}) \approx P'_k(t_{n+1}) = \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{h}\right) \ell'_j(0) \mathbf{y}_{n+1-j}$ und setzen diese Näherung ein in

$$P'_k(t_{n+1}) \approx \mathbf{y}'(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \approx \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}$$

²²Charles William Gear, (1935–)

Lineare Mehrschrittverfahren

BDF-Verfahren

und erhalten die Verfahrensgleichung eines linearen k -Schritt-Verfahrens

$$\sum_{j=0}^k (-\ell'_j(0)) \mathbf{y}_{n+1-j} = h \mathbf{f}_{n+1},$$

das **BDF(k)-Verfahren**. In Standardform:

$$\mathbf{y}_{n+1} + \sum_{j=1}^k \frac{\ell'_j(0)}{\ell'_0(0)} \mathbf{y}_{n+j-1} = -\frac{h}{\ell'_0(0)} \mathbf{f}_{n+1}.$$

Nach Konstruktion besitzt es die Konsistenzordnung k .

Satz 3.16 (Stabilität von BDF-Verfahren)

Das BDF(k)-Verfahren ist genau dann stabil (und damit konvergent), wenn $k \leq 6$.

Lineare Mehrschrittverfahren

BDF-Verfahren

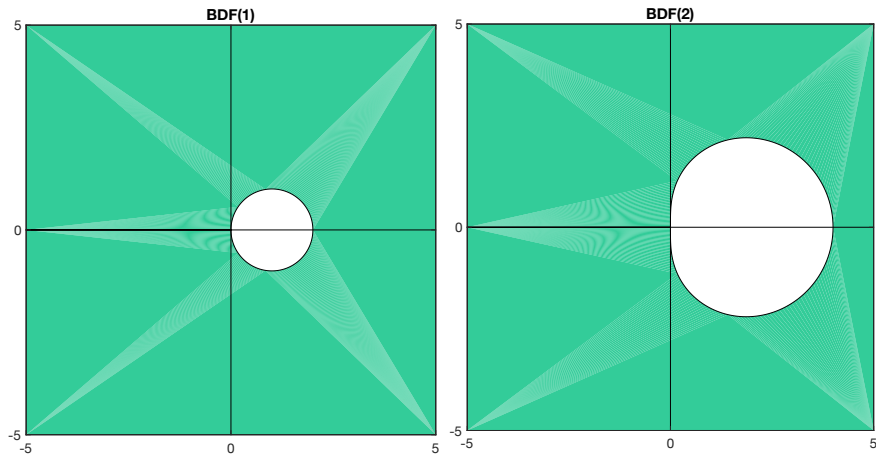
Koeffizienten und Fehlerkonstanten der BDF-Verfahren:

k	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0	β_k	C_{k+1}
1						1	-1	1	$-\frac{1}{2}$
2					1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}$
3				1	$-\frac{18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{3}{22}$
4			1	$-\frac{48}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	$-\frac{12}{125}$
5		1	$-\frac{300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{12}{137}$	$\frac{60}{137}$	$-\frac{10}{137}$
6	1	$-\frac{360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{10}{147}$	$\frac{60}{147}$	$-\frac{20}{343}$

Für $k = 1$ erhält man das **implizite Euler-Verfahren** $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$.
BDF-Verfahren zeichnen sich durch „große“ Stabilitätsbereiche aus.

Lineare Mehrschrittverfahren

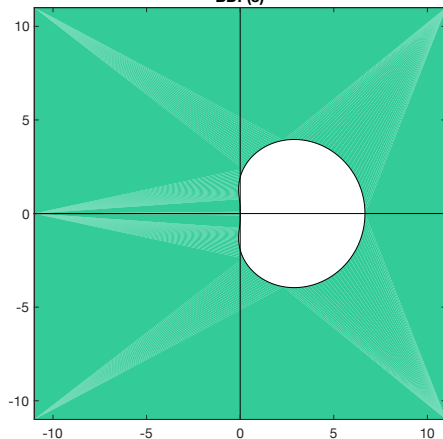
BDF-Verfahren



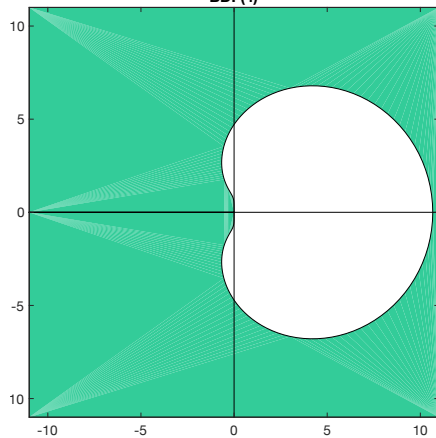
Lineare Mehrschrittverfahren

BDF-Verfahren

BDF(3)



BDF(4)



Lineare Mehrschrittverfahren

BDF-Verfahren

