

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2014/15

6. Übung: Runge-Kutta Verfahren (RKV)

Aufgabe 1

Eine einfache Klasse von Einschrittverfahren für Differentialgleichungen $y = f(t, y)$ sind die sogenannten θ -Methoden mit Parameter $\theta \in [0, 1]$:

$$y_{n+1} = y_n + h [(1 - \theta)f(t_n, y_n) + \theta f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad n \geq 0.$$

- (a) Welche bekannten Methoden erhält man für $\theta = 0$, $\theta = 1$ und $\theta = \frac{1}{2}$?
- (b) Weisen Sie nach, dass das θ -Verfahren für alle $\theta \in [0, 1]$ konvergent ist und bestimmen Sie die Konsistenzordnung in Abhängigkeit von θ .
- (c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in [0, 1]$, so dass das θ -Verfahren für $\theta \in [\alpha, \beta]$ A-stabil ist.
- (d) Die θ -Methode ist insbesondere ein 2-stufiges RKV. Ermitteln Sie die entsprechenden c, b und A der zugehörigen Butcher-Matrix:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$$

Aufgabe 2

Implementieren Sie in MATLAB die RKV zu den folgenden Butcher-Matrizen:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ \hline 1/2 & & 1/2 & \\ \hline 1 & & & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Welche Namen tragen diese Verfahren? Wenden Sie die vier Verfahren auf das Problem $y'(t) = ty(t)$, $y(0)$ im Zeitintervall $[0, 2]$ mit Schrittweite $h = 0.2$ an. Vergleichen Sie die Approximationen mit der exakten Lösung $y(t) = \exp(t^2/2)$. Was beobachten Sie?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Butcher-Matrix für ein explizites, dreistufiges RKV der Ordnung 3 mit $\beta_2 = \beta_3$ und $\gamma_2 = \gamma_3$ und testen Sie die Konsistenzordnung des erhaltenen Verfahrens numerisch in MATLAB anhand des Beispiels aus Aufgabe 2. Dieses Verfahren wird übrigens auch *Nyströms Verfahren 3. Ordnung* genannt.

Aufgabe 4

Schreiben Sie in MATLAB eine Routine, welche für ein RKV gegeben durch die Butcher-Matrix-Komponenten b, A, c die notwendigen Ordnungsbedingungen abprüft und die entsprechende Konsistenzordnung zurückgibt. Wenden Sie diese Routine auf das klassische RKV an.