TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 15. Januar 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2014/15

5. Übung: Lineare Mehrschrittverfahren

Aufgabe 1

Wir untersuchen das lineare Zweischrittverfahren

$$\boldsymbol{y}_{n+2} - \boldsymbol{y}_n = 2h\boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1}).$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Verfahren stabil ist und bestimmen Sie seine Konsistenzordnung.

(b) Implementieren Sie das Verfahren in MATLAB und wenden Sie es zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = -2y,\ y(0) = 1$ auf dem Zeitintervall $[0,T]$, $T = 5$, mit einer Schrittweite von $h = 0.001$ an. Setzen Sie danach $T = 10$ und $T = 15$. Was beobachten Sie?

(c) Wieso stellt ihre Beobachtung keinen Widerspruch zum Hauptsatz dar?

(d) Ermitteln Sie numerisch die Konvergenzrate dieses Verfahrens für das Problem aus b) mit $T = 5$ und $h = 2^{-j}$, $j = 1, \ldots, 10$. Was beoachten Sie? Ist Ihre Beobachtung im Einklang mit dem Ergebnis aus a)?
Ermitteln Sie dazu auch die Konvergenzrate des Verfahrens für $y' = 2y,\ y(0) = 1$ auf $[0, 5]$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Aussagen über das Adam-Bashforth-Verfahren aus Satz 3.9 der Vorlesung.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass es genau ein lineares Zweischrittverfahren der Konsistenzordnung 4 gibt. Welchen Namen trägt dieses Verfahren ?

Implementieren Sie dieses Verfahren in MATLAB und wenden Sie es auf ein Anfangswertproblem $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ mit einer negativ definiten Matrix A an. Was beobachten Sie und warum?

Aufgabe 4

Gegeben sei das lineare Dreischrittverfahren

$$\boldsymbol{y}_{n+3} + \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \boldsymbol{y}_{n+j} = h \sum_{j=0}^{2} \beta_j \boldsymbol{f}_{n+j}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Mehrschrittverfahren genau dann die Konsistenzordnung 4 besitzt, wenn $\alpha_0 + \alpha_2 = 8$ und $\alpha_1 = -9$ ist.

(b) Folgern Sie aus (a), dass kein konvergentes explizites lineares Dreischrittverfahren maximale Konsistenzordnung besitzt.