TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 10. November 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2014/15

3. Übung: Einschrittverfahren

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Näherungen $\boldsymbol{y}_n(h)$ des modifizierten Euler-Verfahrens die folgende Beziehung erfüllen

$$\max_{0\le n\le N(h)} \|\boldsymbol{y}_n(h) - \boldsymbol{y}(t_n)\| = \mathcal{O}(h^2) \quad (h \to 0).$$

Weisen Sie die unterschiedlichen Konvergenzraten des expliziten und modifizierten Eulerverfahrens am Beispiel der logistischen Gleichung von Folie 95 der Vorlesung in MATLAB rechnerisch nach.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Bedingungen (V_1) und (V_2) für die Beispiele 2, 4 und 6 aus Abschnitt 2.2 der Vorlesung erfüllt sind.

Aufgabe 3

Die Verfahren

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}\big(t_n + 0.5h, 0.5(\boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{y}_{n+1})\big) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}h\left(\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(t_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1})\right) \tag{2}$$

heißen *Mittelpunktsregel* bzw. *Trapezregel*. Warum? Sind diese Verfahren konsistent und stabil?

Aufgabe 4

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad r > 0.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Problems und zeigen Sie, dass für diese die Euklid-Norm $\|\boldsymbol{y}(t)\|_2$ konstant bleibt.

(b) Bestimmen Sie Näherungslösungen mittels

- des expliziten Euler-Verfahrens,
- des impliziten Euler-Verfahrens,
- der Trapezregel

in MATLAB.

(c) Wie verhalten sich die Folgen $\{\|\boldsymbol{y}_n\|_2\}_{n\ge 0}$, die von den drei Einschrittverfahren aus b) erzeugt werden? Weisen Sie das beobachtete Verhalten analytisch nach!