TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 28. Oktober 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2014/15

2. Übung: Die Matrixexponentialfunktion

Aufgabe 1

Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{tB} = \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wird durch

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \to \mathrm{e}^{tA},$$

eine Abbildung definiert. Zeigen Sie, dass T stetig ist, die Bedingung $T(0) = I_n$ (Einheitsmatrix) erfüllt und der Funktionalgleichung $T(s+t) = T(s)T(t)$ für $t, s \in \mathbb{R}$ genügt.

Zusatz:

Es gilt insbesondere die Umkehrung, d.h., sei $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Abbildung mit obigen Eigenschaften, dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Wie könnte man diese Aussage beweisen?

Aufgabe 3

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass es genau dann eine (von t unabhängige) Konstante M mit

$$\|\mathrm{e}^{tA}\|_2 \le M \qquad \forall t \ge 0$$

gibt, wenn für die Eigenwerte λ von A folgendes gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda) \le 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \text{ ist halbeinfach.}$$

Dabei heißt ein Eigenwert λ *halbeinfach*, wenn seine algebraische gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist.

Aufgabe 4

Das *Minimalpolynom* m_A einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist definiert als das monische Polynom $m(x)$ kleinsten Grades, für dass $m(A) = 0$ gilt.

(a) In welchen Zusammenhang stehen die Eigenwerte von A zu dessen Minimalpolynom?
Geben Sie eine explizite Darstellung für m_A an!
Wann gilt $m_A(x) = c_A(x)$, wobei c_A das *charakteristische Polynom* von A sei?

(b) Zeigen Sie:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann existiert für jede hinreichend oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein eindeutiges Polynom p mit $\deg(p) = \deg(m_A)$, so dass $p(A) = f(A)$.

Wie praktikabel ist diese Aussage für die Berechnung der Matrixexponentialfunktion?

Hinweis: Bekannte Aussagen zur *Hermiteinterpolation* müssen nicht bewiesen werden.