TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 21. Oktober 2014
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Wintersemester 2014/15

1. Übung: Lineare Differenzengleichungen

Aufgabe 1

Geben Sie eine homogene Differenzengleichung an, welche als Lösung die Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt !

(a) $y_n = 2^{n-1} - 5^{n+1}$

(b) $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

(c) $y_n = 3\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(d) $y_n = (n+2)5^n$

(e) $y_n = 1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzengleichungen! Sind Anfangsbedingungen angegeben, so lösen Sie auch das entsprechende Anfangswertproblem.

(a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + n$

(b) $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 12x_n = e^n$

(c) $x_{n+2} - x_n = 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1$

(d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n, \quad x_1 = x_2 = 0$

Aufgabe 3

Die Tschebyscheff-Polynome erster Art sind definiert als

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad -1 < x < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie: Die Polynome T_n erfüllen die Rekursionsgleichung

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0, \quad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x. \tag{2}$$

(b) Berechnen Sie T_2 und T_3!

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differenzengleichung (2) und überprüfen Sie damit Definition (1).