

# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2014/15



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

- ① Einleitung
  - 1.1 Volterras Prinzip
  - 1.2 Begriffe und theoretische Resultate
  - 1.3 Lineare Differenzgleichungen
  - 1.4 Matrixfunktionen
  - 1.5 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung
  - 1.6 Die Fälschungen des Han van Meegeren
  - 1.7 Weitere Beispiele
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielverfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
  - 3.1 Begriffe
  - 3.2 Die erste Dahlquist-Barriere

- 3.3 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
- 3.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
- 3.5 Absolute Stabilität
- 3.6 BDF-Verfahren
  
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
  - 4.1 Konstruktion
  - 4.2 Konsistenzordnung
  - 4.3 Absolute Stabilität
  - 4.4 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren
  - 4.5 Implizite und halb-implizite Verfahren
  - 4.6 Kollokationsmethoden
  
- ⑤ Steife Differentialgleichungen
  - 5.1 Was sind steife Differentialgleichungen?
  - 5.2 Stabilitätsbegriffe
  - 5.3 Ordnungssterne
  - 5.4 Lineare MSV für steife Probleme
  - 5.5 RKV für steife Probleme

## 5.6 Nichtlineare Stabilitätstheorie

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

- 1 Einleitung
- 2 Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- 3 Lineare Mehrschrittverfahren
- 4 Runge-Kutta-Verfahren
- 5 Steife Differentialgleichungen

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren

Wir betrachten das AWP

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (\text{AWP})$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 besitzt es eine eindeutige Lösung, sagen wir über dem Intervall  $I$ .

Wir wollen diese Lösung  $\mathbf{y}(t)$  für  $t \in [t_0, t_{\text{end}}] \subseteq I$  durch das **Euler-Verfahren**<sup>14</sup>, auch **Euler-Cauchy-Verfahren**<sup>15</sup> oder **Polygonzug-Verfahren**, den Prototyp eines numerischen Verfahrens zur Lösung von AWPen, approximieren. Wie alle numerischen Methoden, die hier besprochen werden, basiert das Euler-Verfahren auf der Idee der **Diskretisierung**: Statt (AWP) über  $[t_0, t_{\text{end}}]$  zu lösen, geben wir uns damit zufrieden, Näherungswerte für die Lösung auf einer diskreten Teilmenge

$$\{t_n : n = 0, 1, \dots, N\} \subset [t_0, t_{\text{end}}]$$

zu bestimmen.

---

<sup>14</sup>Leonhard Euler (1707–1783)

<sup>15</sup>Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren

Wähle  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h = (t_{\text{end}} - t_0)/N$  und definiere

$$t_n := t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

d.h.  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_N = t_{\text{end}}$ . Die Zahl  $h > 0$  heißt **Schrittweite**. (Nur der Bequemlichkeit wählen wir die Schrittweite  $h$  zunächst **konstant**.)

Bezeichnet nun  $\mathbf{y}_n$  einen Näherungswert für  $\mathbf{y}(t_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , dann ist (falls  $\mathbf{y} \in C^2[t_0, t_{\text{end}}]$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{n+1}) &= \mathbf{y}(t_n + h) = \mathbf{y}(t_n) + h\mathbf{y}'(t_n) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{y}''(\xi) \\ &\approx \mathbf{y}(t_n) + h\mathbf{y}'(t_n) = \mathbf{y}(t_n) + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)) \approx \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n). \end{aligned}$$

## Euler-Verfahren

$\mathbf{y}_0$  gegeben,

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1).$$



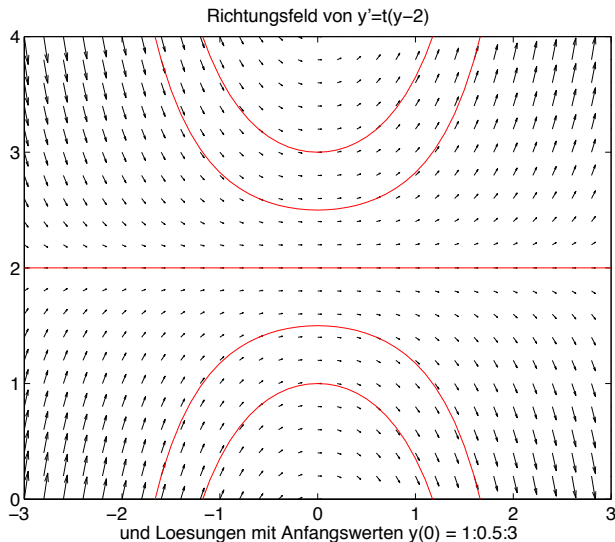
# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren

- Zur Veranschaulichung einer GDG 1. Ordnung  $y' = f(t, y)$  wird oft das assoziierte **Richtungsfeld** herangezogen: In jedem Punkt  $(t, y)$  wird ein Pfeil gezeichnet, der in Richtung der Steigung  $y' = f(t, y)$  weist.
- Der Graph der Lösung des AWP's  $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ , muss einerseits das Richtungsfeld respektieren (d.h. die Tangenten an den Graphen sind Elemente des Richtungsfelds), andererseits den Punkt  $(t_0, y_0)$  enthalten.

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren



# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren

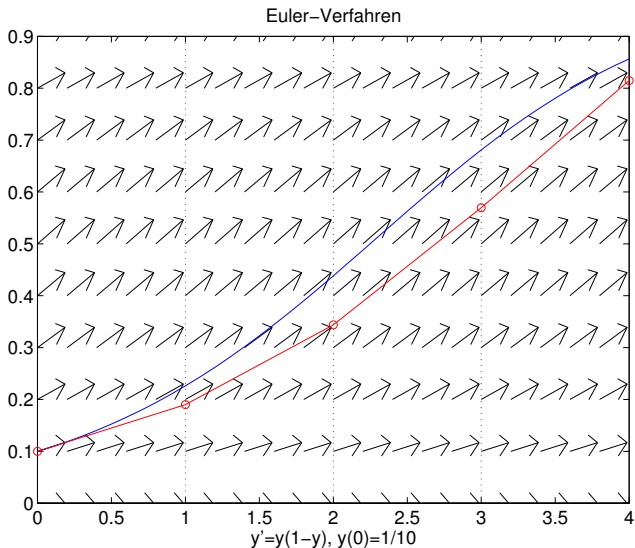
Die nächste Abbildung zeigt, wie das Euler-Verfahren die **logistische Gleichung**

$$y' = y(1 - y), \quad y(0) = 1/10,$$

löst. Statt der exakten Trajektorie zu folgen (was natürlich unmöglich ist), produziert das Euler-Verfahren eine „stückweise lineare Lösung“ (einen Polygonzug). An der Stelle  $t_0 = 0$  arbeitet das Euler-Verfahren mit der richtigen Steigung  $f(t_0, y_0) = 9/100$ , bereits an der Stelle  $t = 1$  ist die Steigung „falsch“. In späteren Schritten entfernt man sich (potentiell) immer weiter von der exakten Lösung.

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren



# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren

**Konvergiert das Euler-Verfahren**, d.h. strebt die Näherungslösung für  $h \rightarrow 0$  gegen die exakte Lösung  $\mathbf{y}(t)$ ?

Formal: Zu jedem Wert von  $h > 0$  gehört eine Folge von Näherungen

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_n(h), \quad n = 0, 1, \dots, N(h) := \text{floor}((t_{\text{end}} - t_0)/h).$$

Das Verfahren heißt **konvergent** (in  $[t_0, t_{\text{end}}]$ ), wenn gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq n \leq N(h)} \|\mathbf{y}_n(h) - \mathbf{y}(t_n)\| = 0. \quad (\text{Konv})$$

### Satz 2.1

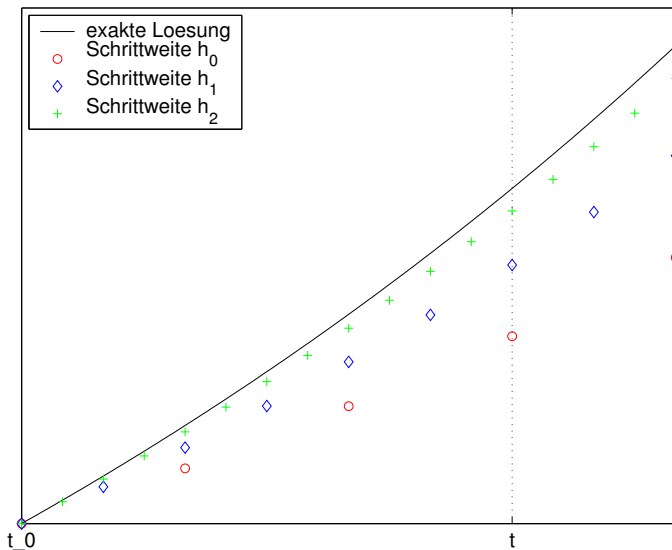
Unter den Voraussetzungen von Satz 1.1 konvergiert das Euler-Verfahren.

Genauer:

$$\max_{0 \leq n \leq N(h)} \|\mathbf{y}_n(h) - \mathbf{y}(t_n)\| = O(h) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren



### Modifiziertes Euler-Verfahren

$\mathbf{y}_0$  gegeben,

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\right) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

### Verbessertes Euler-Verfahren

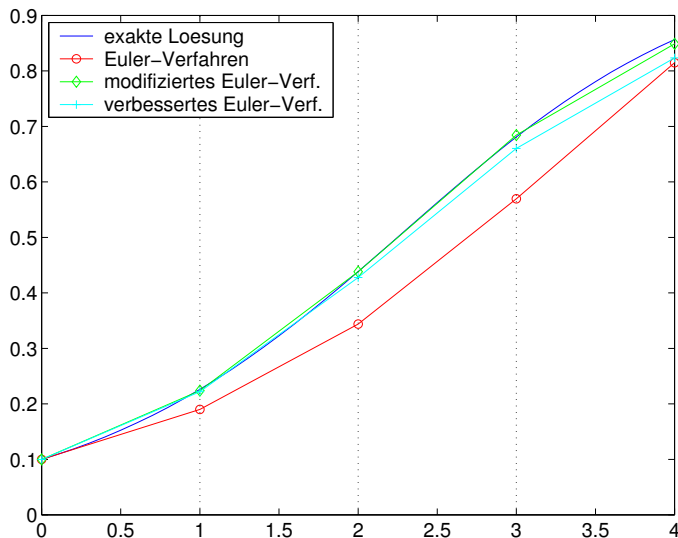
$\mathbf{y}_0$  gegeben,

$$\mathbf{y}_{n+1} := \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n))] \\ (n = 0, 1, \dots, N-1).$$

Die Idee dieser beiden Verfahren macht man sich leicht im Richtungsfeld klar. Auch das modifizierte und das verbesserte Euler-Verfahren konvergieren: Eine triviale Modifikation des Beweises von Satz 2.1 zeigt, dass für diese Verfahren sogar  $\max_{0 \leq n \leq N(h)} \|\mathbf{y}_n(h) - \mathbf{y}(t_n)\| = O(h^2)$  gilt.

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Das Euler-Verfahren





- 1 Einleitung
- 2 Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- 3 Lineare Mehrschrittverfahren
- 4 Runge-Kutta-Verfahren
- 5 Steife Differentialgleichungen

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

Eine Sammlung von Beispielverfahren

Wir werden nun eine Reihe numerischer Verfahren zur Lösung eines AWP's angeben (nicht alle davon sind für einen praktischen Einsatz geeignet), um später auf eine gewisse Anzahl von Beispielen zurückgreifen zu können.

## Beispiel 1

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n &= \frac{1}{4}h(\mathbf{k}_1 + 3\mathbf{k}_3) & \text{mit } \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \\ & & \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + \frac{1}{3}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{3}h\mathbf{k}_1), \\ & & \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(t_n + \frac{2}{3}h, \mathbf{y}_n + \frac{2}{3}h\mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

- Dieses Verfahren ist ein **Einschrittverfahren** (zur Berechnung von  $\mathbf{y}_{n+1}$  ist nur die Kenntnis von  $\mathbf{y}_n$  erforderlich).
- Es ist **explizit**, d.h. nach  $\mathbf{y}_{n+1}$  aufgelöst.
- Es gehört zur Klasse der **Runge-Kutta-Verfahren**<sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Carl Runge (1856–1927), Martin Kutta (1867–1944)

## Beispiel 2

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n &= \frac{1}{2}h(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad \text{mit } \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

ist ebenfalls ein Einschrittverfahren der Runge-Kutta-Klasse. Im Gegensatz zu (2.1) ist es aber **implizit**, d.h. um  $\mathbf{y}_{n+1}$  zu bestimmen, muss ein (im Allgemeinen nichtlineares) Gleichungssystem gelöst werden.

## Beispiel 3

$$\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_{n+1} = \frac{1}{3}h [3\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) - 2\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)] \quad (2.3)$$

ist ein explizites **Zweischrittverfahren**: Man benötigt  $\mathbf{y}_n$  und  $\mathbf{y}_{n+1}$ , um  $\mathbf{y}_{n+2}$  zu bestimmen. Es gehört zur Familie der **linearen Mehrschrittverfahren**. Neben  $\mathbf{y}_0$  ist hier zusätzlich  $\mathbf{y}_1$  (ein sog. **Anlaufstück**) erforderlich, was man sich üblicherweise mit Hilfe eines Einschrittverfahrens beschafft.

Auch

## Beispiel 4

$$\mathbf{y}_{n+2} + \mathbf{y}_{n+1} - 2\mathbf{y}_n = \frac{1}{4}h [\mathbf{f}(t_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}) + 8\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) + 3\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)] \quad (2.4)$$

ist ein lineares Mehr- (genauer: Zwei-) Schrittverfahren. Es ist implizit.

## Beispiel 5

$$\mathbf{y}_{n+3} + \frac{1}{4}\mathbf{y}_{n+2} - \frac{1}{2}\mathbf{y}_{n+1} - \frac{3}{4}\mathbf{y}_n = \frac{1}{8}h [19\mathbf{f}(t_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}) + 5\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)] \quad (2.5)$$

stellt ein explizites lineares Dreischrittverfahren dar.

## Beispiel 6

$$\mathbf{y}_{n+2} - \mathbf{y}_n = h[\mathbf{f}(t_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}^*) + \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)]$$

mit

$$\mathbf{y}_{n+2}^* - 3\mathbf{y}_{n+1} + 2\mathbf{y}_n = \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) - 3\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)] \tag{2.6}$$

ist ein **Prädiktor-Korrektor-Verfahren**, bei dem ein implizites Zweischnittverfahren (der Korrektor) mit einem expliziten Zweischnittverfahren (dem Prädiktor) kombiniert wird. Das zusammengesetzte Verfahren ist explizit.

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

Eine Sammlung von Beispielverfahren

Alle Verfahrensbeispiele haben die Struktur

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h \Phi_f(\mathbf{y}_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k-1}, \dots, \mathbf{y}_n, t_n; h) \quad (\text{V})$$

(wir normieren im Folgenden durch  $\alpha_k := 1$ ) mit

$$\Phi_{f \equiv 0}(\mathbf{y}_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k-1}, \dots, \mathbf{y}_n, t_n; h) \equiv \mathbf{0} \quad (\text{V}_1)$$

und

$$\|\Phi_f(\mathbf{y}_{n+k}, \dots, \mathbf{y}_n, t_n; h) - \Phi_f(\mathbf{y}_{n+k}^*, \dots, \mathbf{y}_n^*, t_n; h)\| \leq M \sum_{j=0}^k \|\mathbf{y}_{n+j} - \mathbf{y}_{n+j}^*\|. \quad (\text{V}_2)$$

Die Eigenschaft (V<sub>2</sub>) ist eine Folge der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  (vgl. Satz 1.1), die immer vorausgesetzt wird.

Wir werden ausschließlich numerische Verfahren untersuchen, die die Struktur (V) besitzen und dabei den Bedingungen (V<sub>1</sub>) und (V<sub>2</sub>) genügen.

- 1 Einleitung
- 2 Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- 3 Lineare Mehrschrittverfahren
- 4 Runge-Kutta-Verfahren
- 5 Steife Differentialgleichungen

### Definition 2.2 (Konvergenz)

Das Verfahren (V) heißt **konvergent**, wenn

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t=t_0+nh}} \mathbf{y}_n = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t=t_0+nh}} \mathbf{y}_n(h) = \mathbf{y}(t)$$

gilt, und zwar

- für alle AWPes, die den Voraussetzungen von Satz 1.1 genügen ( $\mathbf{y}(t)$  bezeichnet die Lösung eines solchen AWPes),
- gleichmäßig für alle  $t \in [t_0, t_{\text{end}}]$ ,
- für alle Lösungen  $\{\mathbf{y}_n(h)\} = \{\mathbf{y}_n\}$  von (V) mit Anfangswerten  $\mathbf{y}_0(h), \dots, \mathbf{y}_{k-1}(h)$ , die  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{y}_j(h) = \mathbf{y}_0, j = 0, \dots, k-1$ , erfüllen.

**Äquivalent:**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n(h)\| = 0.$$



# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Lokaler Diskretisierungsfehler, Residuum

Setzt man die exakte Lösung in (V) ein, so werden linke und rechte Seite nicht übereinstimmen. Es ergibt sich ein **Residuum**

$$\mathbf{R}_{n+k} := \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) - h\Phi_f(\mathbf{y}(t_{n+k}), \mathbf{y}(t_{n+k-1}), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; h).$$

$\mathbf{R}_{n+k}$  ist eng verknüpft mit dem **lokalen Diskretisierungsfehler**  $\mathbf{T}_{n+k}$ .

Unter der **Lokalisierungsannahme**

$$\mathbf{y}_{n+j} = \mathbf{y}(t_{n+j}) \text{ für } j = 0, 1, \dots, k-1$$

liefert (V) in Schritt  $n+k$ :

$$\hat{\mathbf{y}}_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) = h\Phi_f(\hat{\mathbf{y}}_{n+k}, \mathbf{y}(t_{n+k-1}), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; h).$$

Für die exakte Lösung gilt hingegen

$$\mathbf{y}(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \mathbf{y}(t_{n+j}) = h\Phi_f(\mathbf{y}(t_{n+k}), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; h) + \mathbf{R}_{n+k}.$$

Definiert man nun

$$\mathbf{T}_{n+k} := \mathbf{y}(t_{n+k}) - \hat{\mathbf{y}}_{n+k}$$

(**Vorsicht:** die Definition ist nicht einheitlich in der Literatur), so folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{n+k} = & h [\Phi_f(\mathbf{y}(t_{n+k}), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; h) \\ & - \Phi_f(\hat{\mathbf{y}}_{n+k}, \mathbf{y}(t_{n+k-1}), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; h)] + \mathbf{R}_{n+k}. \end{aligned}$$

In speziellen Fällen (lineare Mehrschrittverfahren) kann man die rechte Seite mit dem Mittelwertsatz weiter bearbeiten. Immer folgt aus (V<sub>2</sub>)

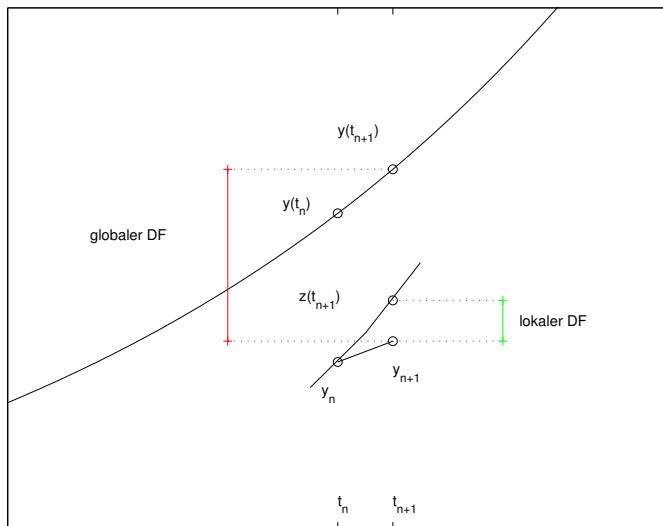
$$\|\mathbf{T}_{n+k}\| \leq hM \|\mathbf{T}_{n+k}\| + \|\mathbf{R}_{n+k}\|$$

und damit

$$(1 - hM) \|\mathbf{T}_{n+k}\| \leq \|\mathbf{R}_{n+k}\|.$$

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

Lokaler Diskretisierungsfehler, Residuum



### Definition 2.3 (Konsistenz)

Das Verfahren (V) heißt **konsistent** [mit (AWP)], wenn

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t=t_0+nh}} \frac{1}{h} \mathbf{R}_{n+k} = \mathbf{0}$$

für alle AWPe gilt, die den Voraussetzungen von Satz 1.1 genügen.

### Satz 2.4 (Konsistenzbedingung)

Das Verfahren (V) ist genau dann konsistent, wenn gilt

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0 \quad (K_1)$$

und 
$$\left[ \sum_{j=0}^k j \alpha_j \right] \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)) = \Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t_n), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; 0). \quad (K_2)$$

Das zum Verfahren (V) gehörende **erste charakteristische Polynom** ist durch

$$\rho(\zeta) = \alpha_k \zeta^k + \alpha_{k-1} \zeta^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \zeta + \alpha_0$$

definiert. Hiermit läßt sich Satz 2.4 kompakter formulieren:

### Satz 2.5 (Konsistenzbedingung')

Das Verfahren (V) ist genau dann konsistent, wenn gilt

$$\rho(1) = 0 \quad (K'_1)$$

$$\text{und } \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)) = \frac{\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t_n), \dots, \mathbf{y}(t_n), t_n; 0)}{\rho'(1)}. \quad (K'_2)$$

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Beispiel zu Konsistenz

Wir betrachten als Beispiel das AWP

$$y' = -y, \quad y(0) = 1 \quad \text{mit Lösung } y(t) = \exp(-t).$$

Das implizite Zweischrittverfahren

$$\begin{aligned} y_{n+2} - (1 + \alpha)y_{n+1} + \alpha y_n \\ = \frac{1}{2}h[f(t_{n+2}, y_{n+2}) + (1 - \alpha)f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \alpha f(t_n, y_n)] \end{aligned}$$

ist konsistent (für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} \rho(1) &= 1 - (1 + \alpha) + \alpha = 0, \\ \Phi_f(y(t_n), y(t_n), y(t_n), t_n; 0)/\rho'(1) &= \frac{1}{2}(2 - 2\alpha)f(t_n, y(t_n))/(2 - (1 + \alpha)) \\ &= f(t_n, y(t_n)). \end{aligned}$$

Lösung mit Anfangswerten  $y_0 = y_1 = 1$ :

$$(1 + \frac{1}{2}h)y_{n+2} - [1 + \alpha - \frac{1}{2}(1 - \alpha)h]y_{n+1} + \alpha(1 - \frac{1}{2}h)y_n = 0 \quad (*)$$

(Differenzgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten).

Allgemeine Lösung:  $y_n = c_1 \xi_1^n + c_2 \xi_2^n$ ,  $\xi_1 = \alpha$  und  $\xi_2 = (1 - \frac{1}{2}h)/(1 + \frac{1}{2}h)$ .

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Beispiel zu Konsistenz

Störe nun (\*) (Rundungsfehler,  $\delta > 0$ ):

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2}h)z_{n+2} - [1 + \alpha - \frac{1}{2}(1 - \alpha)h]z_{n+1} + \alpha(1 - \frac{1}{2}h)z_n &= h\delta \\ z_0 = 1 + \delta, \quad z_1 = 1 + \delta. \end{aligned} \quad (*')$$

Allgemeine Lösung:

$$z_n = c_1 \xi_1^n + c_2 \xi_2^n + \begin{cases} \delta/(1 - \alpha), & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ n\delta, & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

**Fall 1:**  $\alpha \neq 1$

$$z_n = \frac{1}{\gamma} [\mu(\delta)\xi_1^n + \nu(\delta)\xi_2^n] + \frac{\delta}{1 - \alpha}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - \alpha - h(1 + \alpha)/2, & \mu(\delta) &= h[\alpha\delta/(1 - \alpha) - 1], \\ & & \nu(\delta) &= [1 - \alpha(1 + \delta)](1 + h/2). \end{aligned}$$

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Beispiel zu Konsistenz

Ersetze  $\delta$  durch  $\delta^*$ , ergibt Lösung  $\{z_n^*\}$  statt  $\{z_n\}$ .

**Fall 1a:**  $-1 \leq \alpha < 1$ ,

$$|z_n - z_n^*| \leq \left[ \frac{h/(1-\alpha) + 1 + h/2}{|1-\alpha - h(1+\alpha)/2|} + \frac{1}{1-\alpha} \right] |\delta - \delta^*|$$

für alle  $h \leq h_0 = 2(1-\alpha)/(1+\alpha)$ .

**Fall 1b:**  $|\alpha| > 1$   $\{z_n - z_n^*\}$  ist unbeschränkt für  $h \rightarrow 0$ .

**Fall 2:**  $\alpha = 1$

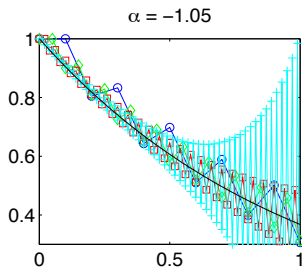
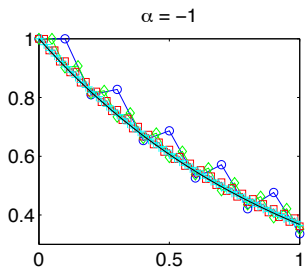
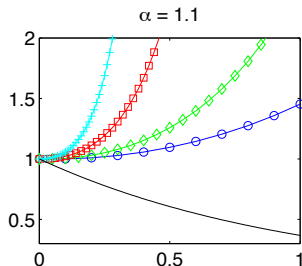
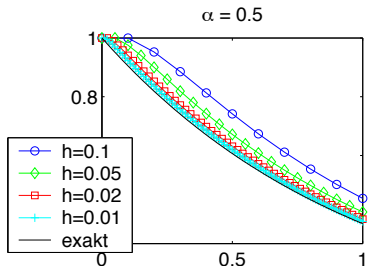
$$z_n = 1 + \frac{h-2}{2h}\delta + \frac{h+2}{2h}\delta \left( \frac{1-h/2}{1+h/2} \right)^n + n\delta$$

und  $\{z_n - z_n^*\}$  ist unbeschränkt für  $h \rightarrow 0$ .



# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Beispiel zu Konsistenz



### Definition 2.6 (Stabilität)

Seien  $\{\delta_n^{(\ell)}\}_{n=0,1,\dots,N}$ ,  $\ell = 1, 2$ , zwei beliebige Störungen der Differenzengleichung (V) und seien  $\{z_n^{(\ell)}\}$ ,  $\ell = 1, 2$ , die Lösungen von

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{y}_{n+j} = h[\Phi_f(\mathbf{y}_{n+k}, \mathbf{y}_{n+k-1}, \dots, \mathbf{y}_n, t_n; h) + \delta_{n+k}^{(\ell)}], \quad (\text{V}_\delta)$$
$$\mathbf{y}_j^{(\ell)} = \mathbf{y}_j(h) + \delta_j^{(\ell)} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1).$$

Die Methode (V) heißt **stabil**, wenn es positive Konstanten  $S$  und  $h_0$  gibt mit

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|z_n^{(1)} - z_n^{(2)}\| \leq S \max_{0 \leq n \leq N} \|\delta_n^{(1)} - \delta_n^{(2)}\|$$

für alle  $h \in (0, h_0]$  und alle zulässigen  $f$ .

### Bemerkungen.

- (1) Stabilität bedeutet, dass die Differenzengleichung **sachgemäß gestellt** ist (vgl. Satz 1.1 und 1.2, wo gezeigt wird, dass die Bedingung (Lip) garantiert, dass das (AWP) sachgemäß gestellt ist).
- (2) Stabilität ist ein Muss für Rechnungen in Gleitpunktarithmetik.

Das Verfahren (V) erfüllt die **Wurzelbedingung**, wenn sämtliche Nullstellen  $\xi$  seines ersten charakteristischen Polynoms betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sind, und zusätzlich aus  $|\xi| = 1$  stets folgt, dass  $\xi$  eine einfache Nullstelle ist.

### Satz 2.7 (Stabilität $\Leftrightarrow$ Wurzelbedingung)

Das Verfahren (V) ist genau dann stabil, wenn es die Wurzelbedingung erfüllt.

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

### Satz 2.8 (Dahlquist)

Das Verfahren (V) ist genau dann konvergent, wenn es konsistent und stabil ist.  
Oder kürzer:

Konsistenz & Stabilität  $\Leftrightarrow$  Konvergenz.

### Bemerkungen.

- (1) Der Beweis zeigt, dass der globale Diskretisierungsfehler  $\max_{0 \leq n \leq N} \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n(h)\|$  bei stabilen Verfahren von der Ordnung  $p$  ist, wenn

$$\max_{0 \leq n \leq N-k} R_{n+k}/h = O(h^p) \quad (\text{Konsistenzordnung } p) \text{ und}$$

$$\max_{0 \leq n \leq k-1} \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n(h)\| = O(h^p) \quad (\text{Anfangswerte})$$

gelten.

- (2) Ob ein Verfahren konvergent ist, kann jetzt rein algebraisch nachgeprüft werden (i.W. über die Nullstellen des ersten charakteristischen Polynoms).

Germund Dahlquist (1925–2005)

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 **Einschrittverfahren**
  - 2.6 Numerische Experimente
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Ein **Einschrittverfahren** hat die Form

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\Phi_f(\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_n, t_n; h). \quad (\text{ESV})$$

Es ist immer stabil, also genau dann konvergent, wenn es konsistent ist. Ist

$$\frac{1}{h}\mathbf{R}_{n+1} = \frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)}{h} - \Phi_f(\mathbf{y}(t_{n+1}), \mathbf{y}(t_n), t_n; h) = O(h^p) \quad (h \rightarrow 0),$$

so besitzt es (mindestens) die **Konsistenzordnung**  $p$ . Das Euler-Verfahren besitzt die Konsistenzordnung 1, denn:

$$\frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)}{h} - \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)) = \frac{h\mathbf{y}'(t_n) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{y}''(\xi_n)}{h} - \mathbf{y}'(t_n) = \frac{1}{2}h\mathbf{y}''(\xi_n).$$

Ist  $\mathbf{f}$   $p$ -mal stetig differenzierbar, so kann man Einschrittverfahren der Konsistenzordnung  $p$  mit der Methode des **Taylor-Abgleichs** konstruieren:

Man entwickelt die (unbekannte) Lösung  $\mathbf{y}(t_n + h)$  formal nach Potenzen von  $h$ ,

$$\mathbf{y}(t_n + h) = \mathbf{y}(t_n) + h\mathbf{y}'(t_n) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{y}''(t_n) + \cdots,$$

und nutzt aus, dass  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  gilt, z.B.

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t_n) &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)), \\ \mathbf{y}''(t_n) &= \mathbf{f}_t(t, \mathbf{y}(t))|_{t=t_n} + \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t))\mathbf{y}'(t)|_{t=t_n} \\ &= \mathbf{f}_t(t_n, \mathbf{y}(t_n)) + \mathbf{f}_y(t_n, \mathbf{y}(t_n))\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)).\end{aligned}$$

Bricht man etwa nach dem zweiten Term ab, so ergibt sich mit

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left[ \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \frac{1}{2}h (\mathbf{f}_t(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}_y(t_n, \mathbf{y}_n)\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)) \right]$$

ein Verfahren zweiter Ordnung.



# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Einschrittverfahren

Es ist klar, dass man dieses Verfahren (oder entsprechende Verfahren für  $p > 2$ ) nur dann verwenden kann, wenn  $f$  einfach zu differenzieren ist (oder mittels automatische Differentiation).

Für die skalare GDG  $y'(t) = ty(t)$  ergibt sich z.B.

$$y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \frac{1}{2}h^2 + ht_n + \frac{1}{2}h^2t_n^2 \right]$$

im Fall von  $p = 2$  und

$$y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \frac{1}{2}h^2 + ht_n + \frac{1}{2}h^2t_n^2 + \frac{1}{2}h^3t_n + \frac{1}{6}h^3t_n^3 \right]$$

im Fall von  $p = 3$ .

Für  $p = 1$  erhält man stets das Euler-Verfahren.

Für dieses Beispiel ergibt sich

mit Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ , d.h. mit exakter Lösung  $y(t) = \exp(t^2/2)$

als (normalisierter) globaler Diskretisierungsfehler

$$h^{-p} \max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n|$$

für die Taylor-Verfahren der Ordnung  $p \in \{1, 2, 3\}$ :

$N$	$h$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
10	1.e-1	1.016e+0	4.301e-1	3.267e-1
100	1.e-2	1.090e+0	4.757e-1	3.541e-1
1000	1.e-3	1.098e+0	4.804e-1	3.569e-1
10000	1.e-4	1.099e+0	4.808e-1	3.548e-1

- ① Einleitung
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielf Verfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
- ⑤ Steife Differentialgleichungen

Wir werden jetzt die Verfahren aus Abschnitt 2 (ab Seite 104) an folgendem AWP testen:

$$y_1' = y_2$$

$$y_1(0) = \frac{1}{2},$$

$$y_2' = \frac{y_2(y_2 - 1)}{y_1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_2(0) = -3.$$

Die Lösung wird für  $t \in [0, 1]$  gesucht.

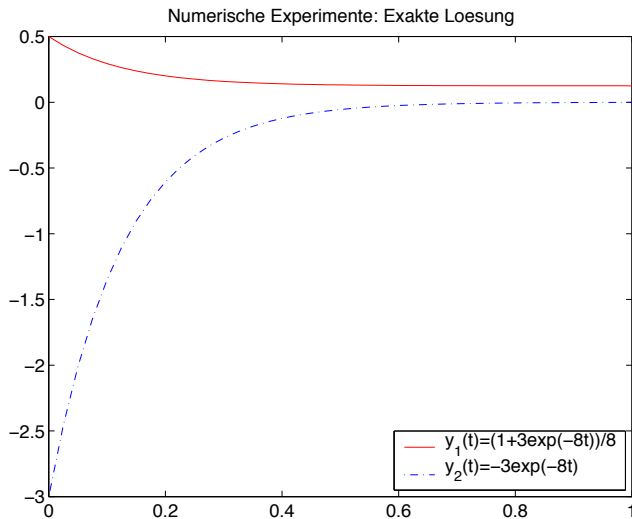
Die exakte Lösung lautet

$$y_1(t) = [1 + 3 \exp(-8t)]/8,$$

$$y_2(t) = -3 \exp(-8t).$$

# Numerische Methoden für Anfangswertprobleme

## Numerische Experimente



### zu Beispiel 4:

Für  $\rho(\zeta) = \zeta^2 + \zeta - 2 = (\zeta - 1)(\zeta + 2)$  gelten

$$\rho(1) = 0 \text{ und } \frac{\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), t_n; 0))}{\rho'(1)} = \frac{3\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))}{3} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)).$$

Die Methode ist also konsistent, aber instabil.

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
0.2	2.6e-02	8.2e-03	9.0e-03	1.5e-01
0.4	1.4e-01	2.1e-01	4.1e+00	1.8e+04
0.6	9.0e-01	5.9e+00	1.9e+03	2.2e+11
0.8	6.2e+00	1.7e+02	8.6e+05	Inf
1.0	4.2e+01	4.7e+03	4.0e+10	

### zu Beispiel 3:

Für  $\rho(\zeta) = \zeta^2 - \zeta = (\zeta - 1)\zeta$  gelten

$$\rho(1) = 0 \text{ und } \frac{\Phi_f(\mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), t_n; 0))}{\rho'(1)} = \frac{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))/3}{1} = \frac{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))}{3}.$$

Die Methode ist also stabil, aber inkonsistent.

$t$	$h = e-01$	$h = e-02$	$h = e-03$	$h = e-04$
0.2	1.3e+00	1.1e+00	1.2e+00	1.2e+00
0.4	1.1e+00	9.1e+00	9.2e+00	9.2e+00
0.6	8.0e-01	5.9e-01	5.9e-01	5.9e-01
0.8	5.5e-01	3.7e-01	3.5e-01	3.5e-01
1.0	3.8e-01	2.2e-01	2.1e-01	2.1e-01

Die Methode ist aber konsistent mit dem AWP

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})/3, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0.$$

Für den Abstand zu dessen exakter Lösung

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = [(1 + 3 \exp(-8t/3))/8, \quad -3 \exp(-8t/3)]^\top$$

ergibt sich:

$t$	$h = e-01$	$h = e-02$	$h = e-03$	$h = e-04$
0.2	3.0e-01	3.6e-02	3.8e-03	3.8e-04
0.4	4.0e-01	4.4e-02	4.4e-03	4.4e-04
0.6	3.9e-01	3.9e-02	3.9e-03	3.9e-04
0.8	3.4e-01	3.1e-02	3.1e-03	3.1e-04
1.0	2.8e-01	2.3e-02	2.3e-03	2.2e-04



zu **Beispiel 5**: Für

$$\rho(\zeta) = \zeta^3 + \zeta^2/4 - \zeta/2 - 3/4 = (\zeta - 1)(\zeta + 5/8 - \sqrt{23i}/8)(\zeta + 5/8 + \sqrt{23i}/8)$$

gelten

$$\rho(1) = 0 \text{ und } \frac{\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), \mathbf{y}(t_n), t_n; 0))}{\rho'(1)} = \frac{3\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))}{3} = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n)).$$

Die Methode ist also konsistent und stabil, damit konvergent.

$t$	$h = 0.1 \uparrow$	$h = 0.05 \uparrow$	$h = 0.025 \downarrow$	$h = 0.0125 \downarrow$
0.2		8.4e-03	9.3e-04	1.1e-04
0.4	2.6e-01	4.1e-02	2.4e-04	4.5e-05
0.6	1.5e+00	1.2e-01	1.6e-04	1.4e-05
0.8	8.1e+00	3.3e-01	2.1e-05	3.8e-06
1.0	4.4e+01	9.1e-01	6.8e-06	9.6e-07

**zu Beispiel 6:** Die Methode ist konsistent und stabil, also konvergent.

$t$	$h = e-01$	$h = e-02$	$h = e-03$	$h = e-04$
0.2	9.0e-01	6.7e-03	2.7e-05	1.7e-07
0.4	4.0e+00	8.9e-02	1.5e-04	4.7e-06
0.6	2.3e+01	1.7e+00	3.4e-03	1.2e-04
0.8	1.4e+02	3.3e+01	8.2e-02	2.9e-03
1.0	7.9e+03	6.6e+02	2.0e+00	7.1e-02
1.2				1.7e+00
1.4				4.3e+01

**zu Beispiel 1:** Die Methode ist konsistent und stabil, also konvergent.

$t$	$h = 0.4 \uparrow$	$h = 0.2 \downarrow$	$h = 0.1 \downarrow$	$h = 0.05 \downarrow$
0.2		6.2e-01	3.9e-02	3.6e-03
0.4	7.8e+00	1.2e-01	1.5e-02	1.4e-03
0.6		2.5e-02	4.5e-03	4.4e-04
0.8	2.0e+01	5.0e-03	1.2e-03	1.2e-04
1.0		1.0e-03	2.9e-04	3.0e-05
1.2	5.0e+01			

**zu Beispiel 2:** Die Methode ist konsistent und stabil, also konvergent.

$t$	$h = 0.8 \downarrow$	$h = 0.4 \downarrow$	$h = 0.2 \downarrow$	$h = 0.1 \downarrow$
0.2			2.7e-01	5.5e-02
0.4		8.2e-01	8.6e-02	2.1e-02
0.6			2.1e-02	6.2e-03
0.8	1.6e+00	1.6e-01	4.6e-03	1.6e-03
1.0			9.6e-04	3.8e-04
1.6	8.3e-01	8.6e-03		
2.4	4.3e-01	4.6e-04		