

# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Wintersemester 2014/15



TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
CHEMNITZ

- Vorlesungswebseite:  
`www.tu-chemnitz.de/mathematik/numa/lehre/ode-2014`
- Vorlesung: Prof. **Oliver Ernst**,  
`oliver.ernst@mathematik.tu-chemnitz.de`  
Mo 13:45 & Do 9:15 (gerade Wochen)
- Übung: Dipl.-Math. **Björn Sprungk**,  
`bjoern.sprungk@mathematik.tu-chemnitz.de`  
Do 9:15 (ungerade Wochen)
- Prüfung: 30 Minuten mündlich, Termin nach Vereinbarung.
- Modul M13: 6 LP, 180 AS.

- Eine **Differentialgleichung** beschreibt eine Beziehung zwischen einer gesuchten Funktion (abhängige Variable) und ihren Ableitungen bezüglich einer oder mehreren (unabhängigen) Variablen.
- Werden nur Ableitungen bezüglich einer Variablen betrachtet, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung (GDG)** (ordinary differential equation, ODE), andernfalls von einer **partiellen Differentialgleichung (PDG)** (partial differential equation, PDE).
- Da explizite Lösungen nur in wenigen Ausnahmefällen zur Verfügung stehen, ist der Einsatz numerischer Methoden zur Lösung von GDGen unvermeidbar.
- Wir befassen uns hier ausschließlich mit numerischen Verfahren zur Lösung von GDGen: Zum Einen wegen der überragenden Rolle, die sie in vielen Anwendungen spielen, was (hoffentlich) im Laufe der Vorlesung klar wird; zum Zweiten aber auch wegen ihrer Bedeutung für die Entwicklung und Analyse numerischer Methoden zur Lösung von PDGen, welche sehr viel schwieriger zu lösen sind und im Mittelpunkt einer eigenen Vorlesung stehen.

Folgende Themen werden behandelt:

- Begriff, Beispiele, theoretische und andere Hilfsmittel
- Numerische Methoden für GDGen
- Lineare Mehrschrittverfahren
- Runge-Kutta-Verfahren
- Schrittweitensteuerung
- Steife Systems
- Krylov-Verfahren für große Systeme von GDGen
- Stochastische Differentialgleichungen (wenn Zeit erlaubt)

- John D. Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem* Wiley, 1991
- Martin Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, 1979.
- Ernst Hairer, Syvert P. Nørsett, Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1987.  
Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, 1991.
- Arieh Iserles. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- Uri M. Ascher, Linda R. Petzold. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, 1998.
- David F. Griffiths and Desmond J. Higham. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problems*. Springer, 2010.
- Wolfram Luther, Klaus Niederdrenk, Fritz Reutter, Harry Yserentant. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Analytische und Numerische Behandlung*. Vieweg, 1987.

Siehe auch die (laufend ergänzte) [Literaturliste](#) auf der Webseite der Vorlesung.

- ① Einleitung
  - 1.1 Volterras Prinzip
  - 1.2 Begriffe und theoretische Resultate
  - 1.3 Lineare Differenzgleichungen
  - 1.4 Matrixfunktionen
  - 1.5 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung
  - 1.6 Die Fälschungen des Han van Meegeren
  - 1.7 Weitere Beispiele
- ② Numerische Methoden für Anfangswertprobleme
  - 2.1 Das Euler-Verfahren
  - 2.2 Eine Sammlung von Beispielverfahren
  - 2.3 Konvergenz, Konsistenz und Stabilität
  - 2.4 Der Hauptsatz
  - 2.5 Einschrittverfahren
  - 2.6 Numerische Experimente
- ③ Lineare Mehrschrittverfahren
  - 3.1 Begriffe
  - 3.2 Die erste Dahlquist-Barriere

- 3.3 Die Verfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton
- 3.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren
- 3.5 Absolute Stabilität
- 3.6 BDF-Verfahren
  
- ④ Runge-Kutta-Verfahren
  - 4.1 Konstruktion
  - 4.2 Konsistenzordnung
  - 4.3 Absolute Stabilität
  - 4.4 Eingebettete Runge-Kutta-Verfahren
  - 4.5 Implizite und halb-implizite Verfahren
  - 4.6 Kollokationsmethoden
  
- ⑤ Steife Differentialgleichungen
  - 5.1 Was sind steife Differentialgleichungen?
  - 5.2 Stabilitätsbegriffe
  - 5.3 Ordnungssterne
  - 5.4 Lineare MSV für steife Probleme
  - 5.5 RKV für steife Probleme

## 5.6 Nichtlineare Stabilitätstheorie