TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 13. Juli 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

14. Übung

Aufgabe 1 (P)

Das Integral

$$\int_0^{0.95} \frac{dx}{1-x} \;=\; \ln 20$$

soll mit Newton–Cotes Formeln mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ approximiert werden.

(a) Ermitteln Sie mit Hilfe der bekannten Fehlerabschätzungen für die zusammengesetzte Trapezregel und für die zusammengesetzte Simpsonregel die Anzahl der Unterteilungen N, so daß der Fehler kleiner als ε wird.
Hinweis zur Bezeichnung: Trapezregel: $N = \frac{b-a}{h}$, Simpsonregel: $N = \frac{b-a}{H},\; H = 2h$.

(b) Implementieren Sie beide Verfahren in MATLAB und überprüfen Sie, ab welcher Anzahl von Unterteilungen die Trapez- bzw. die Simpson-Regel tatsächlich den vorgegebenen Fehler unterschreiten.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß für den Fehler

$$R(f) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) - \int_a^b f(x)\,dx$$

der numerischen Integration folgender Sachverhalt gilt (Satz von Peano):
Für alle Polynome $p(x)$ vom Grad $\leq n$ sei $R(p) = 0$. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C^{n+1}[a,b]$ die Fehlerdarstellung

$$R(f) = \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t) K(t)\,dt$$

mit

$$K(t) := \frac{1}{n!} R[(x-t)_+^n] \quad \text{(Peano–Kern)}\,, \qquad (x-t)_+^n := \begin{cases} (x-t)^n & \text{für } x \geq t \\ 0 & \text{für } x < t \end{cases}.$$

Aufgabe 3

Nutzen Sie den Satz von Peano zusammen mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, um die aus der Vorlesung bekannte Fehlerabschätzung für die Trapez-Formel zu zeigen.

Aufgabe 4

Approximieren Sie mittels des Romberg-Verfahrens und minimaler Schrittweite $h = \frac{\pi}{4}$ das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$