

Numerische Mathematik
Sommersemester 2015

13. Übung

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass mit $(A, B) = \text{trace}(B^H A)$ ein Innenprodukt auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ definiert ist und die davon induzierte Norm die Frobeniusnorm ist.
- (b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bestimmen Sie alle Toeplitz-Matrizen $T^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\|A - T^*\|_F = \min\{\|A - T\|_F : T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ist Toeplitz-Matrix}\}.$$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob die Funktionen $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x^2$ im Raum $L^2(-1, 1)$ orthogonal sind. Falls nicht, überführen Sie diese Funktionen mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens in ein Orthonormalsystem.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 6.15 der Vorlesung.

Aufgabe 4

Beweisen Sie Lemma 6.16 der Vorlesung.

Aufgabe 5

Beweisen Sie Satz 6.17 der Vorlesung.