TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 26. Juni 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

12. Übung

Aufgabe 1

Die Tschebyscheff-Polynome (erster Art) sind auf $[-1,1]$ definiert durch

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

Man zeige:

(a) T_n ist ein Polynom vom exakten Grad n und hat für $n \geq 1$ den Höchstkoeffizienten 2^{n-1}.
Hinweis: Zeigen und nutzen Sie dazu die Beziehung

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) \equiv 0 \qquad \forall n \geq 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms T_n gerade die Tschebyscheff-Knoten sind.

(c) Es sei $f \in C^\infty([-1,1])$ und es gelte $\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| = o(2^n\, n!)$ (d.h. $[\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)|]/[2^n\, n!]$ strebt gegen 0 für $n \to \infty$). p_n bezeichne dasjenige Polynom vom Grad n, das f an den Nullstellen von T_{n+1} interpoliert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left[\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \right] = 0.$$

Hinweis: Für diese Aufgabe ist die Bestimmung der Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms nicht notwendig.

(d) Beweisen Sie, dass das Knotenpolynom für Tschebyscheff-Knoten folgendes erfüllt

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|\omega_{n+1}(z)|} = \frac{1}{2} \max\{|z + \sqrt{z^2+1}|, |z - \sqrt{z^2+1}|\}$$

und erklären Sie damit das Ausbleibens des Runge-Phänomens für die Interpolation an Tschebyscheff-Knoten.

Hinweis: Nutzen Sie die Beziehung zwischen ω_{n+1} und T_n sowie $\arccos z = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}(\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))$.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen (in $[0, 1000]$) des linearen Splines, der die Funktion $f(x) = e^x - 2$ an den Knoten $x_j = j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, 1000$) interpoliert.

(b) Welche der folgenden drei Funktionen f_i sind kubische Splines bezüglich der Unterteilung $\mathcal{T} = [0,1] \cup [1,2] \cup [2,2.5]$ des Intervalls $[0,2.5]$)?

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= |x|, \\
f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 1, \\ x^2 - 2\,x + 2 & \text{für } x \geq 1, \end{cases} \\
f_3(x) &= \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1, \\ -\frac{1}{3}\,x^3 + x^2 + \frac{1}{3} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es seien $\mathcal{T} = \{a = x_0,\, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $n+1$ paarweise verschiedene Knoten $x_i \in \mathbb{R},\ x_i < x_{i+1}$. $\mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$ bezeichnet den Raum der Splines der Ordnung k bzgl. $\mathcal{T}$, d.h.

$$\begin{aligned}
s(t) \in \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}} \quad \Longrightarrow \quad & s(t) \in C^{k-1}[a,b] \\
& s(t)|_{[x_{i-1},x_i]} = s_i(t) \in \mathcal{P}_k
\end{aligned}$$

Die Funktion $(x - x_i)^k_+ \in \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}}$ wird durch

$$(x - x_i)^k_+ = \begin{cases} (x - x_i)^k & x \geq x_i \\ 0 & x < x_i \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}} = \text{span}\{1, x, \ldots, x^k, (x - x_1)^k_+, \ldots, (x - x_{n-1})^k_+\} \\
& \Rightarrow \dim \mathcal{S}^k_{\mathcal{T}} = n + k\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (P)

Schreiben Sie ein MATLAB -Programm, das mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas ein Interpolationspolynom vom Grad n (gegeben durch die Stützstellen und die Werte an den Stützstellen) in einer Stelle x auswertet.

Aufgabe 5 (P)

Schreiben Sie ein MATLAB -Programm, welches für gegebene Stützstellen und Werte an den Stützstellen die dividierten Differenzen berechnet, sowie ein weiteres MATLAB -Programm mit dem man mit Hilfe der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom an einer Stelle x auswerten kann.