TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 18. Juni 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

11. Übung

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Polynom p vom Grad 3, welches $f(x) = 2^x$ an den Stellen $x = -1, 0, 1, 2$ interpoliert mittels

(a) des allgemeinen Ansatzes $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und lösen mit Hilfe der Vandermonde-Matrix,

(b) der Lagrange-Form,

(c) der Newton-Form,

(d) der zweiten baryzentrischen Formel.

Berechnen Sie damit nährungsweise $\sqrt{2}$.

Aufgabe 2

Eine Verallgemeinerung der in der Vorlesung behandelten Interpolationsaufgabe für Polynome besteht darin, zu $n+1$ Knoten $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ sowie zwei Sätzen von je $n+1$ Zahlen $\{f_j\}_{j=0}^n$, $\{f'_j\}_{j=0}^n$ ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$ zu bestimmen, sodass

$$p(x_j) = f_j, \quad p'(x_j) = f'_j \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Interpolationsaufgaben, in denen Ableitungswerte vorgeschrieben sind, nennt man **Hermite-Interpolation**.

(a) Zeigen Sie: Sind $\{\ell_j\}_{j=0}^n$ die Lagrange-Grundpolynome der Knoten $\{x_j\}_{j=0}^n$, so gelten für die Polynome $\{h_j\}_{j=0}^n$ sowie $\{k_j\}_{j=0}^n$ definiert durch

$$\begin{aligned} h_j(x) &:= [\ell_j(x)]^2 \big(1 - 2\ell'_j(x_j)(x - x_j)\big), \\ k_j(x) &:= [\ell_j(x)]^2 (x - x_j) \end{aligned}$$

folgende Aussagen:

(i) $h_j, k_j \in \mathcal{P}_{2n+1}$ für alle j.

(ii) $h_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $h'_i(x_j) = 0$ für alle $1 \le i, j \le n$.

(iii) $k_i(x_j) = 0$, $k'_i(x_j) = \delta_{i,j}$ für alle $1 \le i, j \le n$.

(b) Konstruieren Sie mit diesen Hilfspolynomen eine Lösung der o.g. Hermiteschen Interpolationsaufgabe.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung eindeutig ist.

(d) Bestimmen Sie nun ein Polynom p dritten Grades, welches

x	2	3
$f(x)$	1	2
$f'(x)$	0.5	-2

interpoliert, mittels

- Lösen des resultierenden linearen Systems für die unbekannten Koeffizienten,
- dem Ergebnis aus Teilaufgabe (b).

Aufgabe 3

Zu $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ seien $\ell_j(x), j = 0, \ldots, n$, die Lagrange-Grundpolynome. Man zeige

$$\sum_{j=0}^{n} \ell_j(x)(x - x_j)^k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$