TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 11. Juni 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

10. Übung

Aufgabe 1

Es sei eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ geben durch

$$2x - 2z = 0.$$

Konstruieren Sie eine Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, welche einen gegeben Punkt an dieser Ebene spiegelt (d.h., $P\boldsymbol{x}$ liefert den Spiegelpunkt).

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass folgender Algorithmus das Kleinste-Quadrate-Problem

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*\|_2 = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$$

löst:

- Erstelle die erweiterte Matrix $\bar{A} = [A, \boldsymbol{b}]$.
- Bestimme die Cholesky-Zerlegung von $\bar{A}^\top \bar{A} = \bar{L}\bar{L}^\top$.
- Zerlege
$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ \boldsymbol{y}^\top & \rho \end{bmatrix}.$$
- Die Lösung $\boldsymbol{x}^*$ erhält man nun durch Lösen von $L^\top \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}$ und es gilt $\rho = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*\|_2$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Pseudoinverse $A^\dagger$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|AA^\dagger - I_m\|_F = \min_{X\in\mathbb{R}^{n\times m}} \|AX - I_m\|_F$$

erfüllt. Was ist dabei der Wert des Minimums?

Aufgabe 4

Zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ sei das quadratische Tichonov-Funktional gegeben durch

$$T_\alpha(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2^2 + \alpha\|\boldsymbol{x}\|_2^2\,,\ \alpha > 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Man zeige:

(a) Für jedes $\alpha > 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\boldsymbol{x}_\alpha \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$T_\alpha(\boldsymbol{x}_\alpha) \leq T_\alpha(\boldsymbol{x}) \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \, .$$

(b) $\boldsymbol{x}_\alpha$ erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$(A^\top A + \alpha I)\boldsymbol{x}_\alpha = A^\top \boldsymbol{b} \, .$$

(c) Ist $A^\dagger$ die Pseudoinverse von A, so gilt

$$\lim_{\alpha \to 0} \boldsymbol{x}_\alpha = A^\dagger \boldsymbol{b} \, .$$