TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 2. Juni 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

9. Übung

Hinweis: Programmieraufgaben sind mit (P) gekennzeichnet. Sie können vor der Übung per E-Mail abgegeben werden. Zur erfolgreichen Abgabe gehört dabei auch die Beantwortung evtl. Teilfragen der Aufgabe (z.B. in einem gesonderten Textdokument oder mittels Kommentaren in den MATLAB - Skripten).

Aufgabe 1

Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Man beweise, dass die folgenden vier Gleichungen für $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ die Pseudoinverse $A^\dagger$ von A eindeutig charakterisieren:

$$AXA = A\,,\; XAX = X\,,\; (XA)^H = XA\,,\; (AX)^H = AX\,.$$

Aufgabe 2

Die (reduzierte) QR-Faktorisierung einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ($m \geq n$) kann außer durch Householder-Reflektionen oder Givens-Rotationen auch mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens, angewandt auf die Spaltenvektoren $\boldsymbol{a}_j$ ($j = 1, \dots, n$) von A, berechnet werden.
Es ergibt sich folgender Algorithmus:

for $j = 1 : n$
  $\widetilde{\boldsymbol{q}}_j := \boldsymbol{a}_j$
  for $k = 1 : j-1$
    $r_{kj} := \boldsymbol{q}_k^H \boldsymbol{a}_j$
    $\widetilde{\boldsymbol{q}}_j := \widetilde{\boldsymbol{q}}_j - r_{kj}\boldsymbol{q}_k$
  end
  $r_{jj} := \|\widetilde{\boldsymbol{q}}_j\|_2$
  $\boldsymbol{q}_j := \widetilde{\boldsymbol{q}}_j / r_{jj}$
end

Es stellt sich allerdings heraus, dass dieses Verfahren numerisch nicht sehr stabil ist, was sich in raschem Verlust an Orthogonalität infolge von Rundungsfehlern bemerkbar macht. Man benutzt daher folgende (mathematisch äquivalente) Umformulierung (sog. modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren):

for $j = 1 : n$
  $\widetilde{\boldsymbol{q}}_j := \boldsymbol{a}_j$
end
for $j = 1 : n$
  $r_{jj} := \|\widetilde{\boldsymbol{q}}_j\|_2$
  $\boldsymbol{q}_j := \widetilde{\boldsymbol{q}}_j / r_{jj}$
  for $k = j+1 : n$
    $r_{jk} := \boldsymbol{q}_j^H \widetilde{\boldsymbol{q}}_k$

$\widetilde{\boldsymbol{q}}_k := \widetilde{\boldsymbol{q}}_k - r_{jk}\,\boldsymbol{q}_j$
end
end

Mit den durch $P_i := \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^H$ definierten Orthogonalprojektionen zeige man die Identität

$$(I - P_j)(I - P_{j-1}) \cdots (I - P_1) = I - P_j - P_{j-1} - \cdots - P_1.$$

Verifizieren Sie, dass das klassische Gram-Schmidt-Verfahren den Operationen

$$r_{jj}\,\boldsymbol{q}_j := (I - P_{j-1} - P_{j-2} - \cdots - P_1)\,\boldsymbol{a}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

entspricht, das modifizierte Verfahren hingegen

$$r_{jj}\,\boldsymbol{q}_j := (I - P_{j-1})(I - P_{j-2}) \cdots (I - P_1)\,\boldsymbol{a}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wieviele Gleitpunkoperationen benötigen die beiden Verfahren?

Aufgabe 3 (P)

Schreiben Sie MATLAB -Funktionen `[Q,R] = gs(A)` bzw. `[Q,R] = mgs(A)`, welche eine reduzierte QR-Faktorisierung von A mit dem Gram-Schmidt- bzw. dem modifizierten Gram-Schmidt-Verfahren berechnen.

Verwenden Sie beide Algorithmen zur Berechnung der QR-Zerlegung folgender Testmatrix $A = USV^\top$: U und V seien zwei zufällig gewählte orthogonale $N \times N$-Matrizen (etwa `[U,X]=qr(randn(N))` oder Householder-Matrizen mit zufälligem Householder-Vektor) und $S = \mathrm{diag}(2^{-1}, 2^{-2} \ldots, 2^{-N})$ für $N = 80$. Plotten Sie (logarithmisch) die Diagonalelemente des jeweiligen R-Faktors. Was beobachten Sie und wie erklären Sie diese Beobachtung?

Aufgabe 4 (P)

Schreiben Sie MATLAB -Funktionen `[Q,R]=hqr(A)` und `[Q,R]=gqr(A)`, welche eine QR-Faktorisierung von A mittels Householder-Reflektionen bzw. Givens-Rotationen berechnen.

Wenden Sie diese Verfahren auf eine zufällige Testmatrix an, welche ebenso erzeugt werden soll wie in der vorherigen Aufgabe, und plotten Sie erneut (logarithmisch) die Diagonalelemente des jeweiligen R-Faktors.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Eigenwerte einer Householder-Matrix und einer Givens-Matrix.

Aufgabe 6

Bekanntlich ist durch $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_C = \boldsymbol{x}^T C \boldsymbol{y}$ genau dann ein Innenprodukt definiert ist, wenn C eine symmetrisch positiv definite Matrix ist.

(a) Zeigen Sie, dass für die durch $(\cdot, \cdot)_C$ induzierte Norm $\|\cdot\|_C$ gilt:

$$\|\boldsymbol{x}\|_C = \|C^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2$$

(b) Leiten Sie die (Normalen-)Gleichungen her, die für die Lösung des (gewichteten) Ausgleichsproblems

$$\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_C \to \min$$

mit einer Matrix A mit vollem Rang gelten müssen.

(Hinweis: Lösen Sie das Minimierungsproblem $F(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_C^2 \to \min$)