TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 27. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

8. Übung

Hinweis: Programmieraufgaben sind mit (P) gekennzeichnet. Sie können vor der Übung per E-Mail abgegeben werden. Zur erfolgreichen Abgabe gehört dabei auch die Beantwortung evtl. Teilfragen der Aufgabe (z.B. in einem gesonderten Textdokument oder mittels Kommentaren in den MATLAB - Skripten).

Aufgabe 1

(a) Es seien $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass, falls $I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ invertierbar ist, ein $\sigma \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$(I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)^{-1} = I + \sigma\, \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top,$$

auch bekannt als *Sherman-Morrison-Woodbury*-Formel.

Leiten Sie daraus eine hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit von $I + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ ab und zeigen Sie, dass diese auch notwendig ist.

(b) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix mit bekannter LR-Zerlegung $PA = LR$. Ferner seien wieder $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Leiten Sie einen effizienten Algorithmus zur Lösung von

$$(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

her, welcher die Lösungen von $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ und $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}$ nutzt.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass für eine Toeplitz-Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgendes gilt:

$$TE = ET^\top, \qquad \text{mit } E = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Man nennt diese Eigenschaft auch *Persymmetrie* (Symmetrie bzgl. der Gegendiagonalen). Zeigen Sie weiter, dass auch T^{-1} persymmetrisch ist.

(b) Wir betrachten die *Yule-Walker-Gleichungen* mit positiv definiter Matrix T_n:

$$T_n\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_{n-1} & \dots & t_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = -\boldsymbol{t}_n.$$

Der *Durbin-Algorithmus* löst das System rekursiv: Ausgehend von der Lösung von $T_k \boldsymbol{y}^{(k)} = -\boldsymbol{t}_k$ wird die Lösung von $T_{k+1} \boldsymbol{y}^{(k+1)} = -\boldsymbol{t}_{k+1}$ bestimmt.
Leiten Sie den Algorithmus her und zeigen Sie, dass er $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen benötigt.

Hinweis: Nutzen Sie die Persymmetrie von T_k bzw. T_k^{-1} und die Zerlegung

$$T_{k+1} = \begin{bmatrix} T_k & E_k \boldsymbol{t}_k \\ \boldsymbol{t}_k^\top E_k & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie das Verhalten der LR-Zerlegung der folgenden dünnbesetzten Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für die Konditionszahl einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}{\min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}$$

Diese alternative Definition der Konditionszahl kann auch auf nicht-quadratische Matrizen erweitert werden.

Aufgabe 5 (P)

Gegeben sind Meßpunkte $(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, 6.$

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

Diese Punkte sollen im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch

(a) eine Gerade, (b) eine Parabel, (c) ein kubisches Polynom

approximiert werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Funktionen mit Hilfe der Normalengleichungen für das entsprechende lineare Ausgleichsproblem.

Geben Sie jeweils die Norm des Fehlers (Defekt) $\|b - Ax\|_2$ und die Näherungsfunktion $f(x)$ an. Vergleichen Sie y_i mit $f(x_i)$.

Aufgabe 6

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = n$ und Singulärwertzerlegung $A = U \Sigma V^\top$. Stellen Sie Singulärwertzerlegungen der folgenden Matrizen mittels U, V, Σ dar:

(a) $(A^\top A)^{-1}$, (b) $(A^\top A)^{-1} A^\top$, (c) $A(A^\top A)^{-1}$, (d) $A(A^\top A)^{-1} A^\top$.