TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 19. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

7. Übung

Hinweis: Programmieraufgaben sind mit (P) gekennzeichnet. Sie können vor der Übung per E-Mail abgegeben werden. Zur erfolgreichen Abgabe gehört dabei auch die Beantwortung evtl. Teilfragen der Aufgabe (z.B. in einem gesonderten Textdokument oder mittels Kommentaren in den MATLAB - Skripten).

Aufgabe 1

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige, daß durch $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle := \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}$ genau dann ein Innenprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.

(b) Es sei $A + iB$ eine Hermitesche positiv definite Matrix mit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige, daß

$$C := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

symmetrisch und positiv definit ist.

Aufgabe 2

Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige:

a) Es gilt $a_{ii} > 0$ sowie $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max a_{ii} > 0$.

b) Es gilt

$$a_{i,j}^2 < a_{i,i}a_{j,j} \text{ für alle } i \neq j\ .$$

Aufgabe 3

Bei der Approximation einer stetigen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ werde der Approximationsfehler E in der L^2-Norm gemessen, d.h.

$$E^2 := \|p - f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 [p(t) - f(t)]^2 \,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Minimierung des Fehlers $E = E(a_0, \ldots, a_n)$ auf ein lineares Gleichungssystem

$$H_n \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

führt, wobei

$$\boldsymbol{b} = [b_0, \ldots, b_n]^\top \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad b_i = \int_0^1 f(t)t^i \,\mathrm{d}t, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

H_n die n-te Hilbert-Matrix mit

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j+1}, \quad i,j = 0,\dots,n$$

und $\boldsymbol{a}$ der Vektor der Koeffizienten von p sind.

(b) Zeigen Sie, dass H_n symmetrisch und positiv definit ist.

(c) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von H_3.

Aufgabe 4 (P)

Schreiben Sie ein MATLAB -Programm, welches die Cholesky-Zerlegung einer hermitesch-positiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ berechnet. Bestimmen Sie die Laufzeiten für hermitesche positiv-definite Zufallsmatrizen verschiedener Dimensionen (z. B. $n = 100, 200, \dots, 1000$) und vergleichen Sie diese mit der Ihres Gauß-Eliminations-Programms.

Aufgabe 5

Beweisen Sie Satz 4.4. der Vorlesung (Rückwärtsstabilität des Lösens mit Cholesky-Zerlegung). Vergleichen Sie auch das Ergebnis des Satzes mit dem von Korollar 3.19.

Hinweis: Greifen Sie auf Satz 3.16 (b) (Rückwärtsstabilität des Lösens mit LR-Zerlegung) zurück und schätzen Sie die Einträge von $|\Delta A|$ geeignet ab.