TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 8. Mai 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

6. Übung

Hinweis: Programmieraufgaben sind mit (P) gekennzeichnet. Sie können vor der Übung per E-Mail abgegeben werden. Zur erfolgreichen Abgabe gehört dabei auch die Beantwortung evtl. Teilfragen der Aufgabe (z.B. in einem gesonderten Textdokument oder mittels Kommentaren in den MATLAB - Skripten).

Aufgabe 1

Berechen Sie von der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche, also die unteren/oberen Dreiecksmatrizen L, R sowie die Permutationsmatrix P, für die $PA = LR$ gilt.

Aufgabe 2 (P)

Implementieren Sie in MATLAB jeweils eine Funktion zur Berechnung der LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ per Lehrbuchvariante und mittels des Verfahren von Crout/Doolittle. Testen Sie Ihre Programme an Zufallsmatrizen verschiedener Größe (z.B. $n = 2^1, \dots, 2^{10}$) und führen Sie jeweils Zeitmessungen mit Hilfe der Befehle `tic` und `toc` aus. Plotten Sie die Laufzeiten der beiden Varianten in Abhängigkeit von der Dimension n.

Hinweis: Versuchen Sie, möglichst effizienten MATLAB -Code zu schreiben, d.h. insbesondere `for`-Schleifen zu vermeiden. Stattdessen können oft mehrere Operationen als Vektoroperationen zusammengefasst werden. (Für beide Varianten genügt je eine `for`-Schleife.)

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für Permutationsmatrizen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Es gilt $P^{-1} = P^\top$ und $\|P\|_M \geq 1$ bzgl. einer beliebigen Matrixnorm $\|\cdot\|_M$.

(b) Für die gängigen Matrixnormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_F$ sowie $\|\cdot\|_\infty$ gilt

$$\mathrm{cond}(PA) = \mathrm{cond}(A).$$

(c) Gilt obige Aussage auch für beliebige Matrixnormen?

Aufgabe 4

Sei

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

mit $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$. Dann heißt die Matrix $S := A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}$ das *Schur-Komplement von* $A_{1,1}$ *bezüglich* A. Man zeige: Nach k Schritten von Gauß–Elimination ist $A_{2,2}$ durch S überschrieben.

Aufgabe 5

Entscheidend für die Rückwärtsstabilität der Gauß-Elimination ist, dass die Größe der Einträge der Dreiecksfaktoren L und R beschränkt bleibt. Spaltenpivotsuche gewährleistet $|\ell_{i,j}| \leq 1$ für die Einträge von L. Um das Wachstum der Einträge von R zu beschreiben, wurde der Begriff des *Wachstumsfaktors*

$$g = \frac{\max_{i,j} |r_{i,j}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|}$$

eingeführt.

a) Zeigen Sie: Wird Spaltenpivotsuche bei der Gauß-Elimination verwendet, so gilt $g \leq 2^{n-1}$.

b) Zeigen Sie, dass diese Schranke erreicht wird für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & \\ -1 & \dots & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6 (P)

Verifizieren Sie mit MATLAB den Nutzen der Nachiteration anhand von 10 zufälligen Gleichungssystemen $Ax = b$. Nutzen Sie dazu die MATLAB -Funktionen `single` und `double` zum Wechseln zwischen einfach und doppelt genauer Zahlendarstellung sowie `[L,U,P] = lu(A)` zur Berechnung einer LR-Zerlegung. Beachten Sie, dass `lu` für `single`-Input auch `single`-Output liefert (analog für `double`). Lösen Sie alle vorkommenden Gleichungssysteme mit Hilfe der LR-Zerlegung (nicht mittels Backslash-Operator!). Lassen Sie sich die Verbessung des Fehlers zur exakten (doppelt genauen) Lösung durch eine Nachiteration ausgeben. Probieren Sie auch eine zweite Nachiteration und überzeugen Sie sich, dass diese nichts verbessert.