TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 29. April 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

5. Übung

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit Hilfe der Jordanschen Normalform:

(a) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine (von einer Vektornorm induzierte) Matrixnorm $\|\cdot\|$ (die von A und ϵ abhängt), für die gilt:

$$\|A\| - \epsilon \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

(b) Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ mit $\|A\| = \rho(A)$.

Dabei bezeichne $\rho(A)$ den Spektralradius von A.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Konditionszahl:

(a) Für zwei Matrixnormen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ existieren stets Konstanten $c, C > 0$, so dass

$$c\,\mathrm{cond}_\alpha(A) \leq \mathrm{cond}_\beta(A) \leq C\,\mathrm{cond}_\alpha(A) \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

(b) Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\mathrm{cond}(A) \geq 1 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe 3

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix, so gilt

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\mathsf{max}}(A)}{\lambda_{\mathsf{min}}(A)}.$$

(b) Ist $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix, so gilt $\mathrm{cond}_2(U) = 1$ und

$$\mathrm{cond}_2(UA) = \mathrm{cond}_2(AU) = \mathrm{cond}_2(A) \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass $\|U\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\| \, \forall x \in \mathbb{C}^n$ gilt.

(c) Es gilt: $\mathrm{cond}_2(A^H A) = [\mathrm{cond}_2(A)]^2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Aufgabe 4

Es sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4.01 \end{bmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Konditionszahl von A bzgl. der Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Wie stark darf der Vektor $b = (2,4)^\top$ gestört werden, damit der relative Fehler zur echten Lösung von $Ax = b$ gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm unter 10% liegt?

Verifizieren Sie Ihre Abschätzung an den Beispielen $\widetilde{b}_1 = (2, 4.01)^\top$ und $\widetilde{b}_2 = (2, 4.0005)^\top$.

(c) Für einen beliebigen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ sei eine Nährungslösung $\widetilde{x}$ für $Ax = b$ gegeben. Nutzen Sie den Satz von Rigal und Gaches um – unter geeigneten Annahmen – eine (möglichst kleine) Umgebung von $\widetilde{x}$ anzugeben, in der die echte Lösung x liegt.