TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 22. April 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

4. Übung

Aufgabe 1

(a) Man zeige, daß die Spaltensummen-Norm $\|A\|_1$ und die Zeilensummen-Norm $\|A\|_\infty$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jeweils die der Vektornorm $\|\cdot\|_p, \quad p=1$ bzw. $p=\infty$, zugeordnete Matrixnorm ist.
(Hinweis: Für $p=1$ bzw. $p=\infty$ zeige man, daß

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p\|x\|_p \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

gilt, und daß für mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$ in der Abschätzung jeweils das Gleichheitszeichen angenommen wird.)

(b) Man zeige folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\
\|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

Wann gilt jeweils Gleichheit?

(c) Zu einer beliebigen Matrix-Norm gibt es eine Vektor-Norm, so daß die Matrix-Norm mit dieser verträglich ist.

Aufgabe 2

Die Spaltensummen- und die Frobenius-Norm sind für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch

$$\|A\|_1 := \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\,,$$

und

$$\|A\|_F := \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right]^{1/2} .$$

Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ ist eine Matrix-Norm und verträglich mit der Euklid-Norm $\|\cdot\|_2$.

(b) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_1\,.$$

(c) Für die Rang-1-Matrix xx^T mit $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\|_2 = 1$ gilt

$$\|A(I - xx^T)\|_F^2 = \|A\|_F^2 - \|Ax\|_2^2 \,.$$

Aufgabe 3

Zu einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^n$ ist die zugehörige *Dualnorm* $\|\cdot\|_*$ definiert durch

$$\|\boldsymbol{y}\|_* := \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{y}^H \boldsymbol{x}|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\text{Re } \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Man zeige:

(a) Durch obige Definition von $\|\cdot\|_*$ ist tatsächlich eine Norm definiert.

(b) Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. Für die durch die Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ gilt $\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^H\|_M = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|_*$.

(c) Für die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_M$ gilt

$$\|A\|_M = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\text{Re } \boldsymbol{y}^H A\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{y}\|_* \|\boldsymbol{x}\|}$$

für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
(Hinweis: Man benutze die Tatsache, dass es zu jedem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ einen *dualen* Vektor $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $\boldsymbol{z}^H \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{z}\|_* \|\boldsymbol{x}\|$ gibt.)

Aufgabe 4

Auf einem (komplexen) Vektorraum $\mathcal{V}$ sei ein Innenprodukt (Skalarprodukt) $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathbb{C}$ erklärt. Bekanntlich ist dann durch

$$\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$$

eine Norm, nämlich die durch das Innenprodukt induzierte Norm, auf $\mathcal{V}$ definiert. Man zeige:

(a) Für jede durch ein Innenprodukt induzierte Norm gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2\right), \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$$

sowie die *Polarengleichung*

$$\text{Re}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2\right) \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}.$$

(b) Die 1-Norm im $\mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$, erfüllt nicht die Parallelogrammgleichung, ist also von keinem Innenprodukt induziert.