TU Chemnitz – Professur Numerische Mathematik 9. April 2015
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Björn Sprungk

Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

2. Übung

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie für die Werte $c_1, \ldots, c_5$ aus der Vorlesung und für $c_i = 1, i = 1, \ldots, 5$, sowie $p = 11$ jeweils die Gleichgewichtszustände $U_\infty, V_\infty, W_\infty$.

(b) Geben Sie einen Satz von Steuerungsparametern $c_1, \ldots, c_5$ und p an, so das $U_\infty = 4$, $V_\infty = 16$ und $W_\infty = 64$ gilt.

(c) Schreiben Sie eine MATLAB -Funktion, die die Gleichgewichtsmaschine aus Kapitel 1.1 der Vorlesung simuliert. Der Input dieser Funktion soll aus den Parametern U_0, V_0, W_0, R_0, p, c_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$) und $t_{\text{end}} \in \mathbb{N}$ bestehen. Die Werte von U_n, V_n, W_n, R_n ($n = 0, 1, \ldots, t_{\text{end}}$) sollen ausgegeben und grafisch dargestellt werden. Reproduzieren Sie insbesondere die entsprechende Grafik auf Folie 18 der Vorlesung.

(d) Wenn man ausgehend von $U_0 = V_0 = W_0 = 0$ und $R_0 = 100$ dieses Simulationsprogramm mit den Parametern $p = 11$ sowie $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1$ ausführt, erhält man nach fünfzig Zeitschritten ($t_{\text{end}} = 50$) $R_{50} = -2.85$ (oder einen ähnlich unsinnigen Wert)! Warum? Wie muss man das Programm modifizieren, damit solche "Fehler" nicht mehr auftreten?

Aufgabe 2

(a) Machen Sie sich durch eine Skizze klar, dass das Newton-Verfahren angewandt auf $f(x) = x^2 - a$, $a > 0$, für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$ strebt.

(b) Beweisen Sie: Dabei gilt stets (falls $x_0 \neq \sqrt{a}$)

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > \sqrt{a},$$

d.h. die Näherungsfolge ist (ab x_1) streng monoton fallend.

(c) Zeigen Sie nun, dass für den Fehler $e_m = x_m - \sqrt{a}$

$$e_{m+1} = \frac{e_m^2}{2x_m}$$

gilt. Mit wievielen korrekten Ziffern kann man in x_{m+1} rechnen, wenn x_m sechs korrekte Ziffern besitzt?

(d) Beweisen Sie schließlich mittels den vorherigen Ergebnissen die Konvergenz des Verfahrens gegen $\sqrt{a}$ für $x_0 > 0$.

Aufgabe 3

(a) Das Newton-Verfahren ist nicht immer erfolgreich. Bestimmen Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für die Funktion $f(x) = xe^{-x}$ und machen Sie sich an einer Skizze klar, dass die Newton-Folge mit dem Startwert $x_0 = 2$ divergiert. Was passiert, wenn man den Startwert x_0 aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ wählt?

(b) Konstruieren Sie eine Funktion f, so dass für die Newton-Folge $x_{2m} = 0$ (mit $f(x_{2m}) = -1$) und $x_{2m+1} = 1$ (mit $f(x_{2m+1}) = 1$) für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt (*Newton-Käfig*).

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangsrandwertproblem aus Kapitel 1.3 der Vorlesung die Lösung

$$u(x,t) = 3e^{-t}\sin(x) - e^{-4t}\sin(2x) + e^{-9t}\sin(3x)$$

besitzt.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung die folgenden Aussagen:

- Ist f in $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + Ch^2$$

mit $|C| \leq \frac{1}{6}\max_{x\in I}|f'''(x)|$.

- Ist f in I viermal stetig differenzierbar, so gilt

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0) + Ch^2$$

mit $|C| \leq \frac{1}{12}\max_{x\in I}|f^{(4)}(x)|$.