Numerische Mathematik

Oliver Ernst

Professur Numerische Mathematik

Sommersemester 2015

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Inhalt I

Inhalt II

Inhalt III

Inhalt

Zu gegebener Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ und gegebenen Stützstellen (Knoten)

$$a \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$$

soll eine „einfache" Funktion $p : [a, b] \to \mathbb{C}$ konstruiert werden, die die Interpolationsbedingungen

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

erfüllt.

Wozu?

- f ist nur an diskreten Punkten bekannt (Messwerte), aber eine geschlossene Formel für f ist auf ganz $[a, b]$ erwünscht (z.B. um f an Zwischenstellen $x \in [a, b] \backslash \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ auszuwerten),
- f ist „kompliziert" und soll durch eine „einfache" Funktion angenähert werden (z.B. um die Ableitung $f'(x)$, $x \in [a, b]$, oder das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ näherungsweise zu bestimmen).

Sei X ein linearer Raum sowie $\ell_1, \dots, \ell_n \in X^*$ lineare Funktionale auf X. Zu gegebenen Zahlen $y_1, \dots, y_n$ ist ein Element $x \in X$ gesucht mit der Eigenschaft

$$\ell_j(x) = y_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.1}$$

Lemma 6.1

Sei $\dim X = n$. Sind $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig in X sowie $\ell_1, \dots, \ell_n$ linear unabhängig in X^*, so gilt

$$\det[\ell_i(x_j)]_{i,j=1}^n \neq 0. \tag{6.2}$$

Gilt umgekehrt (6.2) und ist eine der beiden Mengen $x_1, \dots, x_n$ oder $\ell_1, \dots, \ell_n$ linear unabhängig, so ist es auch die jeweils andere Menge.

Satz 6.2

Sei X ein n-dimensionaler Raum und $\ell_1, \dots, \ell_n \in X^*$. Dann besitzt die Interpolationsaufgabe (6.1) genau dann für beliebige Zahlen $y_1, \dots, y_n$ eine eindeutige Lösung, wenn $\ell_1, \dots, \ell_n$ linear unabhängig sind.

Beispiele:

(1) $X = \operatorname{span}\{1, x^2\}$ auf $[-1, 1]$; $\ell_j(f) = f(x_j)$, $j = 1, 2$; $-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$.

(2) Ist X ein linearer Raum d-variater Polynome und die Funktionale $\{\ell_j\}_{j=1}^n$ gegeben durch die Auswertung an n verschiedenen Punkten im $\mathbb{R}^d$, so sind diese Funktionale nicht notwendig linear unabhängig.

Inhalt

Zu gegebenen (paarweise verschiedenen) Knoten

$$a \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$$

und gegebenen Funktionswerten $\{f_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{C}$ soll ein Interpolationspolynom

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \in \mathscr{P}_n$$

(mit komplexen Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$, d.h. $n+1$ Freiheitsgrade) vom Grad n konstruiert werden, das die $n+1$ Interpolationsbedingungen

$$p(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

erfüllt.

Satz 6.3

Die polynomiale Interpolationsaufgabe ist eindeutig lösbar. Mit den Lagrange-Grundpolynomen [Joseph Louis Lagrange, 1736–1813]

$$\ell_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \mathscr{P}_n$$

(beachte $\ell_i(x_i) = 1$ und $\ell_i(x_j) = 0$ für $j \neq i$) lässt sich das Interpolationspolynom in der Lagrange-Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, \ell_i(x)$$

darstellen.

Beispiel 1. Daten:

$$(x_0, f_0) = (-1, -1), \quad (x_1, f_1) = (0, -1), \quad (x_2, f_2) = (2, 2).$$

Lagrange-Grundpolynome:

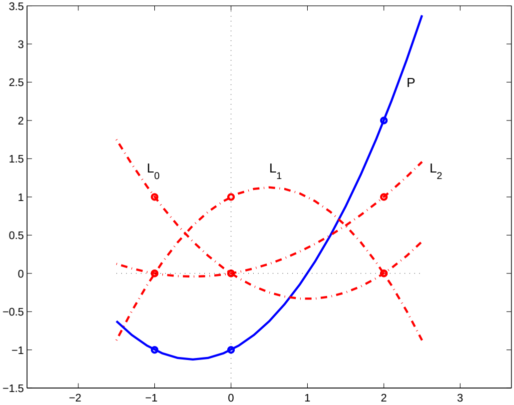
$$\ell_0(x) = \frac{x(x-2)}{3},$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{-2},$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)x}{6}.$$

Interpolationspolynom:

$$\begin{aligned} p(x) &= -\ell_0(x) - \ell_1(x) + 2\ell_2(x) \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1. \end{aligned}$$



Die Auswertung der Lagrange-Formel ist aufwendig, wenn ein neues Datenpaar hinzukommt. Eine rekursive Berechnung ist ökonomischer:

Lemma 6.4

Für eine beliebige Indexmenge $0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ bezeichne $p_{i_0,i_1,\dots,i_k}$ das (nach Satz 6.3 eindeutig bestimmte) Polynom vom Grad k, das die Bedingungen

$$p_{i_0,i_1,\dots,i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}, \qquad j = 0, 1, \dots, k$$

erfüllt. Dann gilt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} p_i(x) &= f_i, \\ p_{i_0,i_1,\dots,i_k}(x) &= \frac{(x - x_{i_0}) p_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x) - (x - x_{i_k}) p_{i_0,i_1,\dots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}. \end{aligned}$$

Rechenschema (Algorithmus von Neville-Aitken, [Charles William Neville, ∗ 1941]; [Alexander Craig Aitken, 1895–1967]):

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
x_0	$p_0(x)=f_0$				
		$p_{0,1}(x)$			
x_1	$p_1(x)=f_1$		$p_{0,1,2}(x)$		
		$p_{1,2}(x)$		$p_{0,1,2,3}(x)$	
x_2	$p_2(x)=f_2$		$p_{1,2,3}(x)$		$p_{0,1,2,3,4}(x)$
		$p_{2,3}(x)$		$p_{1,2,3,4}(x)$	
x_3	$p_3(x)=f_3$		$p_{2,3,4}(x)$		
		$p_{3,4}(x)$			
x_4	$p_4(x)=f_4$				

(Berechnungsreihenfolge : $p_0 \to p_1 \to p_{0,1} \to p_2 \to p_{1,2} \to p_{0,1,2} \to \cdots$)

Beispiel 2 (vgl. Beispiel 1).

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$
-1	-1		
		$\frac{(x-(-1))(-1)-(x-0)(-1)}{0-(-1)} = -1$	
0	-1		$\frac{(x-(-1))(3x/2-1)-(x-2)(-1)}{2-(-1)}$
		$\frac{(x-0)2-(x-2)(-1)}{2-0} = \frac{3}{2}x-1$	$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$
2	2		

Aufwand des Neville-Aitken Schemas (für Auswertung des Interpolationspolynoms vom Grad n an einer Stelle x):
$\frac{5}{2}n^2 + \frac{7}{2}n + 1$ Gleitpunktoperationen (falls die Differenzen $x - x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ vorab bestimmt werden).

Tableau der dividierten Differenzen von f (vgl. § 4.4):

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
x_0	f_0				
		$f_{0,1}$			
x_1	f_1		$f_{0,1,2}$		
		$f_{1,2}$		$f_{0,1,2,3}$	
x_2	f_2		$f_{1,2,3}$		$f_{0,1,2,3,4}$
		$f_{2,3}$		$f_{1,2,3,4}$	
x_3	f_3		$f_{2,3,4}$		
		$f_{3,4}$			
x_4	f_4				

mit

$$f_{i_0,i_1,\dots,i_k} := \frac{f_{i_1,i_2,\dots,i_k} - f_{i_0,i_1,\dots,i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}} \quad (k \geqslant 1).$$

Satz 6.5

(vgl. Satz 4.7 in § 4.4) Mit Hilfe der dividierten Differenzen lässt sich das (nach Satz 6.3 eindeutig bestimmte) Interpolationspolynom p in Newton-Form

$$\begin{aligned} p(x) &= f_0 + f_{0,1}(x - x_0) + f_{0,1,2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + f_{0,1,\dots,n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

darstellen.

Rechenaufwand:

- Zur Bestimmung der Differenzentafel: $\frac{3}{2}(n^2 + n)$ Gleitpunktoperationen.
- Zur Auswertung des Newtonschen Interpolationspolynoms mit dem Horner-Schema ([William George Horner, 1786–1837]):
  $3n$ Gleitpunktoperationen (pro Auswertungspunkt).

Beispiel 3 (vgl. Beispiele 1 und 2).

Dividierte Differenzen:

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$
-1	$\boxed{-1}$		
		$f_{0,1} = \frac{(-1)-(-1)}{0-(-1)} = \boxed{0}$	
0	-1		$f_{0,1,2} = \frac{3/2-0}{2-(-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$
		$f_{1,2} = \frac{2-(-1)}{2-0} = \frac{3}{2}$	
2	2		

Das bedeutet:

$$p(x) = \boxed{(-1)} + \boxed{0}(x-(-1)) + \boxed{\frac{1}{2}}(x-(-1))(x-0) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1.$$

Das zu den (paarweise verschiedenen) Interpolationsknoten $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ gehörende Knotenpolynom sei definiert durch

$$\omega_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \in \mathscr{P}_{n+1}.$$

Definiert man die baryzentrischen Gewichte $\{w_j\}_{j=0}^n$ durch

$$w_j := \frac{1}{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^n (x_j - x_k)} = \frac{1}{\omega_{n+1}'(x_j)}, \qquad j = 0, \dots, n, \tag{6.3}$$

so gilt für die Lagrange Grundpolynome

$$\ell_j(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{w_j}{x - x_j}, \qquad j = 0, \dots, n,$$

und hiermit lässt sich das Interpolationspolynom darstellen durch die ...

erste baryzentrische Formel

$$p(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} f_j \frac{w_j}{x - x_j}.$$

Da die konstante Funktion $f \equiv 1$ exakt interpoliert wird gilt

$$1 = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j},$$

und somit nach Quotientenbildung und Kürzen die zweite baryzentrische Formel

$$p(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} f_j \frac{w_j}{x - x_j}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}}.$$

Aufdatierung. Bei Hinzunahme von x_{n+1}

$$w_j^{\text{neu}} := \frac{w_j^{\text{alt}}}{x_j - x_{n+1}}, \qquad j = 0, \dots, n, \quad (2n+2 \text{ Flops}).$$

w_{n+1} aus (6.3), $n+1$ weitere Flops, falls $x_j - x_{n+1}$ gemerkt werden.

Aufwand.

- Berechnung von $\{w_j\}_{j=0}^n$ erfordert $\sum_{j=1}^n 3j = \frac{3}{2}n(n+1)$ Flops.
- Bei gegebenen Gewichten $\{w_j\}_{j=0}^n$ jede Auswertung von p in weiteren $5n+4 = O(n)$ Flops.

Weitere Vorteile.

- w_j hängen nicht von den Daten f_j ab, d.h. bei gegebenen Gewichten können beliebige Funktionen f in $O(n)$ Flops interpoliert werden.
- w_j unabhängig von Knotennummerierung (vgl. dividierte Differenzen).

Beispiel. Interpolation an äquidistanten Knoten in $[a, b]$ führt auf

$$w_j = (-1)^j \binom{n}{j} \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

(modulo des gemeinsamen Faktors $\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{b-a}\right)^n$).

Satz 6.6 (Fehler der Polynominterpolation)

Die Funktion $f \in C^{n+1}[a,b]$ werde durch das Polynom $p \in \mathscr{P}_n$ interpoliert an den paarweise verschiedenen Knoten $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$. Deren Knotenpolynom sei bezeichnet mit

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \in \mathscr{P}_{n+1}.$$

Dann gibt es zu jedem $x \in [a,b]$ ein $\xi = \xi(x) \in (a,b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Mit $M_{n+1} := \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f^{(n+1)}(t)|$ gilt somit für alle $x \in [a,b]$ die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\omega_{n+1}(t)|. \tag{6.4}$$

Korollar 6.7

Die Funktion $f \in C^\infty[a,b]$ mit

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \qquad \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{6.5}$$

werde für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch das Polynom $p_n \in \mathscr{P}_n$ an der beliebigen Knotenfolge $\{x_j^{(n)}\}_{j=0}^n \subset [a,b]$ interpoliert. Dann gilt

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Die sehr starke Forderung (6.5) ist erfüllt z.B. für e^x, $\sin x$, $\cos x$ und (natürlich) für Polynome. Bereits für die rationale Funktion $f(x) = 1/x$ mit $f^{(n)}(x) = \pm n!/x^{n+1}$ gilt (6.5) etwa auf dem Intervall $[1,2]$ schon nicht mehr.

Idee (motiviert durch Fehlerabschätzung): wähle Knoten $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$ so, dass

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |\omega_{n+1}(t)| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|$$

so klein wie möglich wird.

Lösung: Tschebyscheff-Knoten [Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff, 1821–1894]

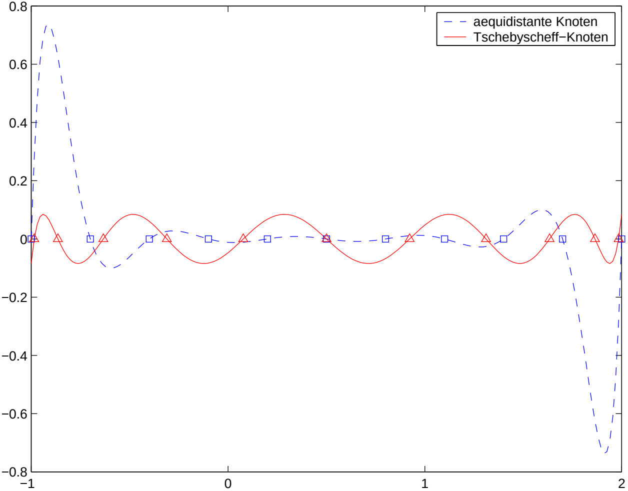
$$x_i^{(\mathsf{T})} = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\,\pi\right) + \frac{a+b}{2}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

mit

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i^{(\mathsf{T})}| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n < \max_{a \leqslant t \leqslant b} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|$$

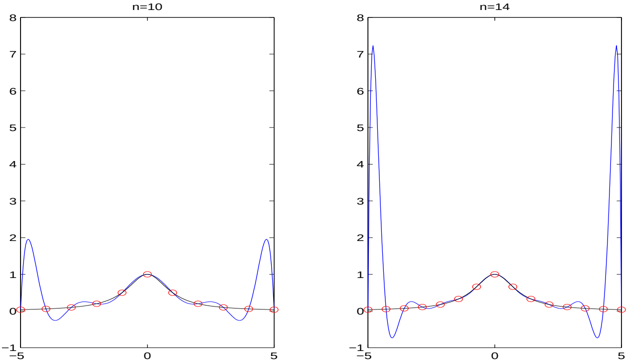
für jede andere Wahl $x_0, \ldots, x_n$ der Knoten.

Knotenpolynome mit äquidistanten und Tschebyscheff-Knoten:



Beispiel 4.(Runge[6]-Phänomen[7]) Interpoliere an $n+1$ äquidistanten Stützstellen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5, \qquad \text{(Runge-Funktion)}$$

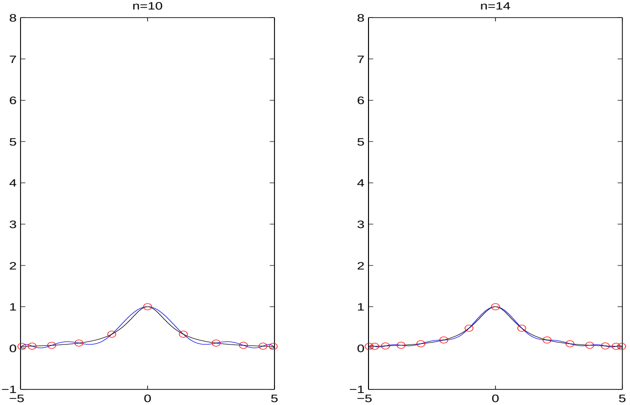


[6] [Carl David Tolmé Runge, 1856–1927].

[7] C. Runge. *Über emprirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten*. Zeitschrift für Mathematik und Physik 46 (1901) pp. 224–243

Beispiel 5. Interpoliere an $n+1$ Tschebyscheff-Knoten

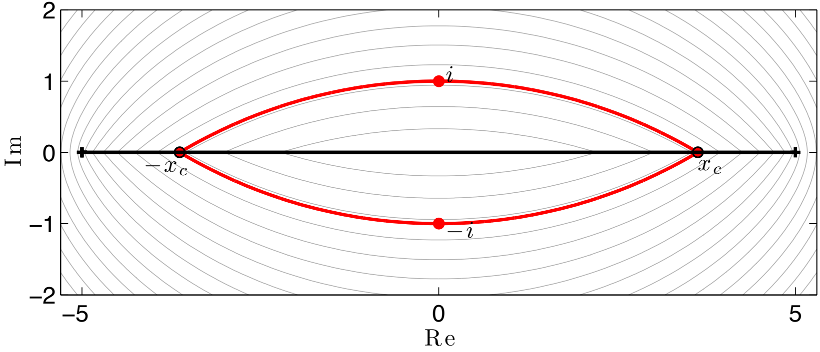
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -5 \leqslant x \leqslant 5.$$



- Durch eine geeignete Knotenwahl (Tschebyscheff-Knoten) lässt sich auch die Runge-Funktion durch Interpolationspolynome beliebig genau annähern.
- Prinzipiell ist eine Approximation durch Interpolationspolynome aber nur dann ratsam, wenn man mit wenigen Knoten (d.h. mit Polynomen niedrigen Grades) ausreichend gute Ergebnisse erzielen kann. Das ist i.A. nur bei extrem glatten Funktionen (wie etwa bei der Exponentialfunktion) gewährleistet. (Die Runge-Funktion ist zwar in ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, besitzt aber Pole in $\pm\sqrt{-1}$. Wie gut eine Funktion durch reelle Interpolationspolynome genähert werden kann, hängt auch von der Lage ihrer komplexen Singularitäten ab!)
- Polynome hohen Grades neigen zu Oszillationen und sind daher zur Approximation oft unbrauchbar.

Für äquidistante Knoten in $[-5, 5]$ gilt $\lim_{n\to\infty} |\omega_{n+1}(z)|^{\frac{1}{n+1}} = G(z)$,

$$G(z) = \exp\left\{ \frac{1}{10} \operatorname{Re}\left[(z+5)\log(z+5) - (z-5)\log(z-5)\right] - 1 \right\}.$$



Höhenlinien von $G(z)$, rot gekennzeichnet ist das Niveau von $G(\pm i)$, welches in $\pm x_c \approx \pm 3.6333843024$ die reelle Achse schneidet.

Satz 6.8 (Runge, 1901)

Besitzt die Funktion f keine Singularität im Gebiet

$$D_\rho := \{z \in \mathbb{C} : G(z) \leqslant G(\rho)\}, \qquad \rho > 0,$$

so gilt

$$p_n(x) \to f(x) \quad \text{für} \quad n \to \infty \text{ gleichmäßig für } x \in (-\rho, \rho).$$

Naheliegende Idee, um die n-te Ableitung einer komplizierten Funktion f anzunähern:

(1) Bestimme ein Interpolationspolynom p vom Grad n für f.

(2) Differenziere p n-mal: $p^{(n)}(x) = n!\, f_{0,1,\dots,n}$.

Beispiele:

(a) Knoten: x_0 und $x_1 = x_0 + h$, d.h.

$$f'(x_0) \approx p'(x_0) = 1!\, f_{0,1} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(b) Knoten: $x_0 = x_1 - h$, x_1 und $x_2 = x_1 + h$, d.h.

$$f''(x_1) \approx p''(x_1) = 2!\, f_{0,1,2} = \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1) + f(x_1 - h)}{h^2}.$$

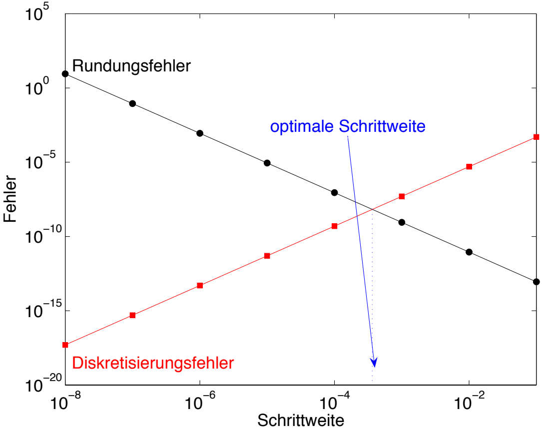
Problematik: Numerische Auslöschung.
Für $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ approximiere

$$0.636653582\ldots = f(0.6) = f''(0.6) \approx \frac{f(0.6-h) - 2f(0.6) + f(0.6+h)}{h^2}$$

für $h = 10^{-e}$, $e = 1, 2, \ldots$, im IEEE-double-Format
(Maschinengenauigkeit: eps $= 2^{-52} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$).

e	$f''(0.6) \approx$	e	$f''(0.6) \approx$
1	$\underline{0.63}718430367986$	5	$\underline{0.63665}517302525$
2	$\underline{0.63665}888761277$	6	$\underline{0.636}82392692499$
3	$\underline{0.636653}63525534$	7	$\underline{0.6}4392935428259$
4	$\underline{0.63665358}540632$	8	2.22044604925031

$$\begin{aligned}
\text{Diskretisierungsfehler} \quad &\sim \quad \frac{1}{12}\, f^{(4)}(0.6)\, h^2 \;\approx\; \frac{1}{20}\, 10^{-2e}, \\
\text{Rundungsfehler} \quad &\approx \quad 4h^{-2}\text{eps} \;=\; 4 \text{ eps } 10^{2e}.
\end{aligned}$$



Inhalt

Splines sind „stückweise Polynome“.[8]

Idee: Um eine besser Polynomapproximation zu erzielen, wird hier nicht der Polynomgrad erhöht, sondern die Unterteilung des Intervalls verfeinert.
Seien $n+1$ Knoten in $[a,b]$ gegeben: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Mit

$$\mathscr{T} := [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

bezeichnen wir die zugehörige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Ein Spline vom Grad k bez. $\mathscr{T}$ ist eine Funktion $s \in C^{k-1}[a,b]$, die auf jedem Teilintervall von $\mathscr{T}$ mit einem Polynom vom Grad k übereinstimmt:

$$s|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathscr{P}_k \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n.$$

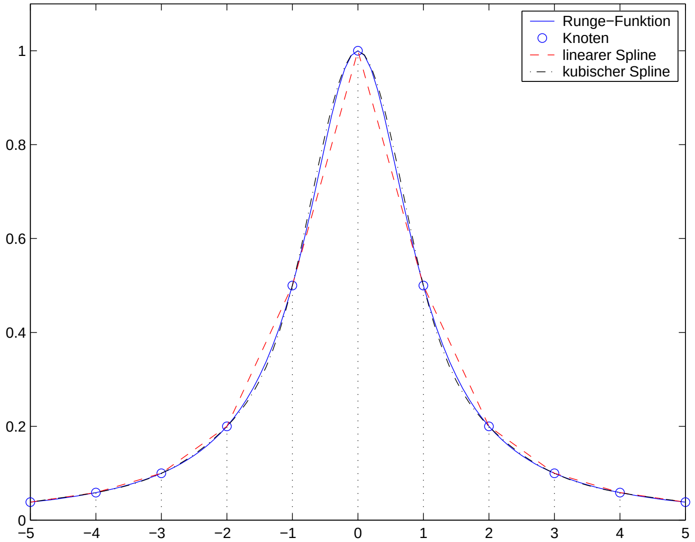
Satz 6.9

Die Menge $\mathscr{S}^k_{\mathscr{T}}$ aller Splines vom Grad k bez. $\mathscr{T}$ ist ein $(n+k)$-dimensionaler linearer Raum.

[8] Wörtlich: Spezielle biegsame Kurvenlineale, die durch Halterungen gezwungen werden, auf dem Zeichenpapier gegebene Punkte zu verbinden; wurden im Schiffsbau verwendet.

Spline-Interpolation

Spline-Approximation der im Runge-Beispiel



Einfachster Fall: $k = 1$.

Ein Spline s vom Grad 1 (linearer Spline) ist charakterisiert durch die beiden Eigenschaften:

(1) Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ von $\mathscr{T}$ ist s linear:

$$s(x) = \alpha_i + \beta_i x \quad \text{für alle } x \in [x_{i-1}, x_i] \text{ und } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(2) Auf ganz $[a, b]$ ist s stetig, d.h. für $i = 1, 2, \ldots, n-1$

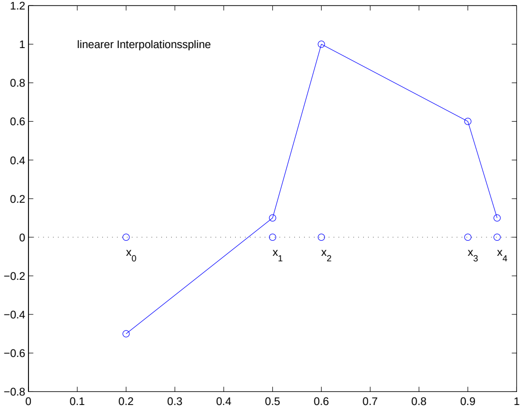
$$\lim_{x \to x_i -} s(x) = \alpha_i + \beta_i x_i = \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} x_i = \lim_{x \to x_i +} s(x).$$

Interpolationsaufgabe: Zu vorgebener Zerlegung $\mathscr{T} = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$ von $[a, b]$ und zu vorgegebenen Werten $f_0, f_1, \ldots, f_n$ bestimme man einen linearen Spline $s \in \mathscr{S}^1_{\mathscr{T}}$ mit

$$s(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Offensichtlich: Diese Aufgabe ist eindeutig lösbar:

$$s(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \qquad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i].$$



Fehler des linearen Interpolationssplines: ($f \in C^2[a,b]$)

Lokal, d.h. für $x \in [x_{i-1}, x_i]$, gilt

$$|f(x) - s(x)| = \frac{1}{2}|f''(\zeta)|\,|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leqslant \frac{1}{8} M_{2,i}\, h_i^2$$

mit $M_{2,i} = \max_{x_{i-1} \leqslant \zeta \leqslant x_i} |f''(\zeta)|$ und $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Global, d.h. für $x \in [x_0, x_n]$, erhalten wir

$$|f(x) - s(x)| \leqslant \frac{1}{8} M_2\, h_{\max}^2$$

mit $M_2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} M_{2,i} = \max_{x_0 \leqslant \zeta \leqslant x_n} |f''(\zeta)|$ und $h_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$.

Adaptive Knotenwahl. Stategie: Fehler etwa gleich auf jedem Teilintervall. D.h.: Wähle h_i invers proportional zu $\sqrt{M_{2,i}}$ (viele Knoten dort, wo die Krümmung von f groß ist).

Zur Implementierung.
Gegeben: $x_0, x_1, \dots, x_n$ und $f_0, f_1, \dots, f_n$.
Gesucht: Wert $s(x)$ des linearen Interpolationssplines an der Stelle x.

- Bestimme $g_{i-1} = (f_i - f_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$ für $i = 1, 2, \dots, n$.
- Falls $x \in [x_{i-1}, x_i]$, dann $s(x) = f_{i-1} + g_{i-1}\,(x - x_{i-1})$.

Problem: Gegeben x, in welchem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ liegt x?
Einfach, falls $h_i = h$ (äquidistante Knoten):

$$i = \left\lceil \frac{x - x_0}{h} \right\rceil := \min \left\{ k \in \mathbb{N} \,:\, k \geqslant \frac{x - x_0}{h} \right\}.$$

Schwieriger bei beliebigen Knoten: binäres Suchen ergibt Komplexität von $\approx \log n$.

Gesucht ist ein interpolierender kubischer Spline $s \in \mathscr{S}^3_{\mathscr{T}}$.

Charakteristische Eigenschaften:

(1) Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ von $\mathscr{T}$ ist s kubisch:

$$s(x) = p_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_{i-1}) + \gamma_i(x - x_{i-1})^2 + \delta_i(x - x_{i-1})^3.$$

(2) Auf ganz $[a, b]$ ist s zweimal stetig differenzierbar, d.h.

$$p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i), \quad p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i), \quad p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$$

für $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

(3) Interpolationsbedingungen:

$$s(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Fazit: $3(n-1) + (n+1) = 4n - 2$ Bedingungen, aber $4n$ Freiheitsgrade.

Drei Möglichkeiten für die erforderlichen zwei Zusatzbedingungen.

Natürlicher Spline:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \tag{N}$$

Hermitescher oder vollständiger Spline [Charles Hermite, 1822–1901]:

$$s'(x_0) = f_0' \quad \text{und} \quad s'(x_n) = f_n' \quad \text{mit} \quad f_0', f_n' \in \mathbb{R}. \tag{H}$$

Periodischer Spline: Falls $s(x_0) = s(x_n)$,

$$s'(x_0) = s'(x_n) \quad \text{und} \quad s''(x_0) = s''(x_n). \tag{P}$$

Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ besitzt der kubische Spline die Darstellung

$$s(x) = p_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_{i-1}) + \gamma_i(x - x_{i-1})^2 + \delta_i(x - x_{i-1})^3$$

mit Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und δ_i, welche sich wiederum darstellen lassen durch durch die Momente $\mu_i := s''(x_i)$ und die Funktionswerte f_i $(i = 0, 1, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f_{i-1}, & \beta_i &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(\mu_i + 2\mu_{i-1}), \\ \gamma_i &= \frac{1}{2}\mu_{i-1}, & \delta_i &= \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{6h_i}, \end{aligned}$$

wobei $h_i := x_i - x_{i-1}$.

Mit anderen Woren: Ein kubischer Spline ist durch die Funktionswerte und die Momente

$$f_i, \mu_i \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

eindeutig bestimmt.

Die $(n+1)$ Momente μ_i erfüllen die $(n-1)$ linearen Gleichungen

$$\frac{h_i}{6}\mu_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}\mu_i + \frac{h_{i+1}}{6}\mu_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$(i = 1, 2, \dots, n-1)$ und zwei Zusatzgleichungen:

(N)
$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \\ \mu_n &= 0, \end{aligned}$$

(H)
$$\begin{aligned} \frac{h_1}{3}\mu_0 + \frac{h_1}{6}\mu_1 &= \frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0', \\ \frac{h_n}{6}\mu_{n-1} + \frac{h_n}{3}\mu_n &= f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}, \end{aligned}$$

(P)
$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_n, \\ \frac{h_1}{6}\mu_1 + \frac{h_1}{6}\mu_{n-1} + \frac{h_1 + h_n}{3}\mu_n &= \frac{f_1 - f_n}{h_1} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}. \end{aligned}$$

Im Weiteren werden nur vollständige kubische Splines (Bedingung (H)) betrachtet, analoge Aussagen gelten unter den Bedingungen (N) bzw. (P).

Die Momente des vollständigen kubischen Splines erfüllen das LGS (s.o.)

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} & \frac{h_n}{6} \\ & & & \frac{h_n}{6} & \frac{h_n}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

mit $d_0 = \dfrac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'$, $\quad d_j = \dfrac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \dfrac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$,

und $d_n = f_n' - \dfrac{f_n - f_{n-1}}{h_n}$.

Satz 6.10

Für jede Wahl der Knoten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ist das Gleichungssystem (6.6) eindeutig lösbar. D.h.: Zu jeder Knotenwahl gibt es genau einen vollständigen kubischen Interpolationsspline für f.

Satz 6.11 (Fehler bei kubischer Spline-Interpolation)

Ist $f \in C^4[a,b]$ und $s \in \mathscr{S}^3_{\mathscr{T}}$ der vollständige kubische Interpolationsspline für f, dann gelten

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,b]} |f(x) - s(x)| &\leqslant \frac{5}{384} M_4\, h_{\max}^4,\\
\max_{x\in[a,b]} |f'(x) - s'(x)| &\leqslant \frac{1}{24} M_4\, h_{\max}^3,\\
\max_{x\in[a,b]} |f''(x) - s''(x)| &\leqslant \frac{3}{8} M_4\, h_{\max}^2
\end{aligned}$$

mit $\quad M_4 := \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(4)}(x)| \quad$ und $\quad h_{\max} := \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (x_i - x_{i-1}).$

Wir definieren allgemein

$$\mathscr{H}^k = \mathscr{H}^k(a,b) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f, f', \dots, f^{(k-1)} \text{ absolut stetig}, \\ f^{(k)} \text{ ex. f.ü }, f^{(k)} \in L^2(a,b)\}$$

und setzen für $f \in \mathscr{H}^2$,

$$|f|_2 := \left(\int_a^b |f''(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Lemma 6.12

Für $f \in \mathscr{H}^2$ und $s \in \mathscr{S}^3_{\mathscr{T}}$ gilt

$$\begin{aligned} |f - s|_2^2 =& |f|_2^2 - |s|_2^2 \\ & - 2 \left\{ [f'(x) - s'(x)] s''(x) \Big|_a^b - \sum_{i=1}^n [f(x) - s(x)] s'''(x) \Big|_{x_{i-1}+}^{x_i -} \right\}. \end{aligned}$$

Satz 6.13 (Minimierungseigenschaft kubischer Splines)

Ist $f \in \mathscr{H}^2$ und $s \in \mathscr{S}^3_{\mathscr{T}}$ ein zugehöriger kubischer Interpolationsspline, der eine der drei Zusatzbedingungen (N), (H) oder (P) erfüllt, dann folgt

$$|s|_2^2 \leqslant |f|_2^2 \left(= \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x \right).$$

Interpretation von Satz 6.13. Unter allen Funktionen $f \in \mathscr{H}^2$ mit

$$f(x_i) = f_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n,$$

minimiert der interpolierende kubische Spline mit einer der Zusatzbedingungen (H), (N) oder (P) näherungsweise die Biegeenergie

$$E_B(f) := \int_a^b \frac{f''(x)^2}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}} \,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f''(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Inhalt

Bestapproximation in Innenprodukträumen

Sei $\mathscr{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Innenprodukt $(\cdot,\cdot)$. Dann wird durch $\|\boldsymbol{v}\| := (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathscr{V})$ eine Norm auf $\mathscr{V}$ definiert. Ist $\mathscr{V}$ bez. dieser Norm vollständig, so heisst $(\mathscr{V},(\cdot,\cdot))$ ein Hilbert-Raum.

Beispiele:

1.) $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ mit Innenprodukt $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x}$ $((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^H \boldsymbol{x})$ ist ein Hilbert-Raum. (Die vom Innenprodukt induzierte Norm ist die Euklid-Norm.)

2.) $\ell^2 := \left\{\boldsymbol{x} = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sum_{j=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$ mit dem Innenprodukt $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$ ist ein Hilbert-Raum.

3.) $\mathbb{C}^\infty := \left\{\boldsymbol{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : x_j = 0 \text{ bis auf endlich viele } j\right\}$ mit dem Innenprodukt $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$ ist kein Hilbert-Raum.

4.) $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit dem Innenprodukt $(A,B) = \operatorname{trace}(B^H A)$ ist ein Hilbert-Raum. (Die vom Innenprodukt induzierte Norm ist die Frobenius-Norm.)

5.) $L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty\}$ mit dem Innenprodukt $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$ ist ein Hilbert-Raum.

Bestapproximation in Innenprodukträumen

Approximationsaufgabe: Sei $\mathscr{U}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum des Innenproduktraums $\mathscr{V}$ und $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$. Bestimme $\boldsymbol{u}^\star = \boldsymbol{u}^\star(\boldsymbol{v}) \in \mathscr{U}$ mit

$$\|\boldsymbol{u}^\star - \boldsymbol{v}\| < \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \qquad \text{für alle } \boldsymbol{u} \in \mathscr{U},\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}^\star.$$

$\boldsymbol{u}^\star$ heißt die Bestapproximation an $\boldsymbol{v}$ aus $\mathscr{U}$.

Erinnerung. Sei $\mathscr{U}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum des Innenproduktraums $\mathscr{V}$. Dann ist die Orthogonalprojektion auf $\mathscr{U}$ $P : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ definiert durch

$$P\boldsymbol{v} = \begin{cases} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{v} \in \mathscr{U}, \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{v} \in \mathscr{U}^\perp. \end{cases}$$

Ist $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{U}$, so gilt

$$P\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 + \dots + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{u}_n \qquad \text{für alle } \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}.$$

Bestapproximation in Innenprodukträumen

Satz 6.14

Sei $\mathscr{U}$ ein endlich-dimensionaler Teilraum des Innenproduktraums $\mathscr{V}$, P die Orthogonalprojektion auf $\mathscr{U}$ und $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}$.
Dann ist die Bestapproximation $\boldsymbol{u}^\star$ aus $\mathscr{U}$ an $\boldsymbol{v}$ gegeben durch $\boldsymbol{u}^\star = P\boldsymbol{v}$.
Die Bestapproximation ist eindeutig bestimmt und charakterisiert durch

$$\boldsymbol{u}^\star - \boldsymbol{v} \perp \mathscr{U}.$$

Ist $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{U}$, so gelten

$$\boldsymbol{u}^\star = \sum_{j=1}^n (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \quad \text{und} \quad \|\boldsymbol{u}^\star\| = \left(\sum_{j=1}^n |(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j)|^2\right)^{1/2} \leqslant \|\boldsymbol{v}\|$$

sowie

$$\|\boldsymbol{u}^\star - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}^\star\|^2.$$

Bestapproximation in Innenprodukträumen

Beispiel. Die Bestapproximation an $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus dem Unterraum der symmetrischen Matrizen (bez. der Frobenius-Norm) ist

$$A_S := \tfrac{1}{2}(A + A^\top) \quad \text{(der symmetrische Anteil von } A\text{).}$$

Beispiel. Der Raum $\mathscr{T}_n$ der trigonometrischen Polynome vom Grad n definiert durch

$$\mathscr{T}_n := \operatorname{span}\{e^{ikt} : k = 0, \pm 1, \dots, \pm n\} \subset L^2(0, 2\pi), \quad \text{(Bezeichnung: } i^2 = -1\text{)}$$

besitzt die Dimension $2n+1$. Die Funktionen $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\}_{k=-n}^n$ bilden eine ON-Basis von $\mathscr{T}_n$. Die Bestapproximation an $f \in L^2(0, 2\pi)$ aus $\mathscr{T}_n$ ist also

$$u_n^*(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t.$$

Bemerkung. Im Fall von $a_k = \overline{a}_{-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, (z.B. wenn f reellwertig ist) folgt mit $\alpha_0 = 2a_0,\ \alpha_k = 2\operatorname{Re}(a_k),\ \beta_k = -2\operatorname{Im}(a_k)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

$$u_n^\star(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big[\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)\big].$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned}
u_n^\star(t) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} a_{-k} e^{-ikt} \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k[\cos(kt) + i\sin(kt)] + \overline{a_k}[\cos(kt) - i\sin(kt)]\Big) \\
&= \underbrace{a_0}_{=:\frac{\alpha_0}{2}} + \sum_{k=1}^{n} \big[\underbrace{2\operatorname{Re}(a_k)}_{=:\alpha_k} \cos(kt) \underbrace{-2\operatorname{Im}(a_k)}_{=:\beta_k} \sin(kt)\big].
\end{aligned}$$

Inhalt

Seien

$$f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x_j := 2\pi j/m, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

d.h. $x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1}$ sind äquidistante Knoten aus $[0, 2\pi)$.

Gesucht ist ein reelles trigonometrisches Polynom vom Grad n,

$$t_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big],$$

das die m Interpolationsbedingungen

$$t_n(x_j) = f_j \qquad (j = 0, 1, \dots, m-1) \tag{6.7}$$

erfüllt. Hierbei ist

$$n = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{falls } m \text{ gerade,} \\ \frac{m-1}{2} & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Vermöge der Abbildung

$$\phi : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \qquad x \mapsto z = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

gehen die Knoten x_j über in die m-ten Einheitswurzeln:

$$\phi(x_j) = e^{2\pi i j/m} = [e^{2\pi i/m}]^j = \omega_m^j, \qquad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

mit $\omega_m := e^{2\pi i/m} = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$.

Setzt man $\beta_0 = 0$ und für $k = 0, 1, \dots, n$

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix} a_k \\ a_{-k} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k) \\ \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}, \text{ d.h.}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_{-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k + a_{-k} \\ i(a_k - a_{-k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Re} a_k \\ -2 \operatorname{Im} a_k \end{bmatrix},$$

so folgt

$$t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k = z^{-n} \sum_{k=-n}^{n} a_k z^{k+n} = z^{-n} p_{2n}(z)$$

mit $p_{2n}(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^{k+n} = \sum_{j=0}^{2n} a_{j-n} z^j \in \mathscr{P}_{2n}$.

Wegen

$$p_{2n}(\omega_m^j) = \omega_m^{jn}\, t_n(x_j)$$

ist die trigonometrische Interpolationsaufgabe hiermit zurückgeführt auf eine (gewohnliche) Interpolationsaufgabe für (algebraische) Polynome.

Satz 6.15

Zu beliebig vorgegebenen paarweise verschiedenen Knoten $x_0, x_1, \dots, x_{2n} \in [0, 2\pi)$ und zu beliebigen Funktionswerten $f_0, f_1, \dots, f_{2n} \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein reelles trigonometrisches Polynom $t_n \in \mathscr{T}_n$ mit $t_n(x_j) = f_j \quad (j = 0, 1, \dots, 2n)$.

Lemma 6.16

Für die m-ten Einheitswurzeln ω_m^k ($k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$) gelten:

(a) $\left[\omega_m^k\right]^j = \omega_m^{kj} = \left[\omega_m^j\right]^k \quad (j \in \mathbb{Z})$,

b) $\omega_{m\ell}^{k\ell} = \omega_m^k \quad (\ell \in \mathbb{Z},\ \ell \neq 0)$,

c) $\overline{\omega_m^k} = \omega_m^{-k}$,

d) $$\sum_{j=0}^{m-1} \omega_m^{kj} = \begin{cases} m, & \text{falls} \quad k = 0 \pmod m, \\ 0, & \text{falls} \quad k \neq 0 \pmod m. \end{cases}$$

Satz 6.17

Das komplexe (algebraische) Interpolationspolynom

$$p_{m-1}(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k \in \mathscr{P}_{m-1}$$

mit $p_{m-1}(\omega_m^j) = f_j \in \mathbb{C} \quad (j = 0, 1, \dots, m-1)$ besitzt die Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f_j \omega_m^{-kj}, \qquad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{6.8}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} F_m \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix}$$

Satz 6.17 (Fortsetzung)

mit der Fourier-Matrix

$$F_m := \left[\omega_m^{-kj}\right]_{0 \leqslant k,j \leqslant m-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_m^{-1} & \cdots & \omega_m^{-m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_m^{-m+1} & \cdots & \omega_m^{-(m-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung. Mit den Bezeichnungen aus Satz 6.17 minimiert das „abgeschnittene“ Interpolationspolynom

$$p_{m,d}(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_d z^d, \qquad 0 \leqslant d \leqslant m-1,$$

unter allen Polynomen $q \in \mathscr{P}_d$ die Fehlerquadratsumme zur Interpolationsvorschrift:

$$\sum_{j=0}^{m-1} |f_j - p_{m,d}(\omega_m^j)|^2 < \sum_{j=0}^{m-1} |f_j - q(\omega_m^j)|^2 \qquad \text{für alle } q \in \mathscr{P}_d,\ q \neq p_{m,d}.$$

Satz 6.18

Für $m = 2n$ oder $m = 2n + 1$ gibt es zu beliebigen $f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \in \mathbb{R}$ ein reelles trigonometrisches Interpolationspolynom

$$t_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big] \in \mathscr{T}_n$$

vom Grad n, das die m Bedingungen

$$t_n(2\pi j/m) = f_j \qquad (j = 0, 1, \dots, m-1)$$

erfüllt. Seine Koeffizienten sind gegeben durch

$$\alpha_k = \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f_j \cos\frac{2\pi jk}{m} \quad \text{bzw.} \quad \beta_k = \frac{2}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f_j \sin\frac{2\pi jk}{m}, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Im Fall $m = 2n$ muss $\beta_n = 0$ gesetzt und α_n halbiert werden.