TU Chemnitz
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

8. Übungsblatt

Aufgabe 31:

In der digitalen Signalverarbeitung tritt das Problem auf, aus p Werten eines Signals den nächsten Wert vorherzusagen. Mathematisch ist ein Signal eine Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von reellen Zahlen, in der Regel die Auswertung eines kontinuierlichen Signals $s(t), t \in \mathbb{R}$, zu äquidistanten Zeitpunkten $t_n = n\Delta t$. Bei der *linearen Vorhersage* (linear prediction) ergibt sich der vorhergesagte Wert $\tilde{s}_n$ aus einer Linearkombination der p vorangehenden:

$$\tilde{s}_n = \sum_{i=1}^{p} a_i s_{n-i}.$$

Bezeichnen wir den Fehler bei der Vorhersage mit $e_n := s_n - \tilde{s}_n$ und die Fehlerquadratsumme über N Schritte mit $E := \sum_{n=0}^{N-1} e_n^2$, so führt die Minimierung von E in Abhängigkeit von den Koeffizienten $a_1, \dots, a_p$ (Ableitungen nach a_j, $j = 1, 2, \dots, p$, gleich Null setzen) zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{n=0}^{N-1} s_n s_{n-j} = \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{n=0}^{N-1} s_{n-k} s_{n-j}, \qquad j = 1, \dots, p,$$

oder, mit den Bezeichnungen

$$C = [c_{i,k}]_{i,k=1}^{p}, \quad c_{i,k} = \sum_{n=0}^{N-1} s_{n-i} s_{n-k}, \quad \boldsymbol{c} = [c_{1,0} \ \dots \ c_{p,0}]^\top,$$

in Matrixschreibweise zu $C\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$. Unter gewissen statistischen Annahmen über das Signal s vereinfachen sich die Koeffizienten $c_{i,k}$ zu

$$c_{i,k} = \sum_{n=0}^{N-1-(i-k)} s_n s_{n+(i-k)},$$

womit C zu einer symmetrischen Toeplitz-Matrix mit den Einträgen $c_{i,j} = c_{i-j}$ wird. Das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & c_1 \\ c_{p-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

bezeichnet man als die *Yule-Walker Gleichungen*.

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Lösung der Yule-Walker Gleichungen mit dem Algorithmus von Durbin.

b) Testen Sie dies an geeigneten Daten und verifizieren Sie, dass Ihr Algorithmus $\approx 2n^2$ Flops für die Lösung eines $n \times n$ Systems benötigt.

Aufgabe 32:

Es sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, r bezeichne den Rang von A. Man beweise, daß die folgenden vier Gleichungen für $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Pseudoinverse $A^\dagger$ von A eindeutig charakterisieren:

$$AXA = A\,,\; XAX = X\,,\; (XA)^H = XA\,,\; (AX)^H = AX\,.$$

Aufgabe 33:

Zeigen Sie, dass für die Konditionszahl einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}{\min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}$$

Diese alternative Definition der Konditionszahl kann auch auf nicht-quadratische Matrizen erweitert werden.

Aufgabe 34:

Gegeben sind Meßpunkte $(x_i, y_i),\; i = 1, \ldots, 6$.

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

Diese Punkte sollen im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch

(a) eine Gerade

(b) eine Parabel und

(c) ein kubisches Polynom

approximiert werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Funktionen mit Hilfe der Normalengleichungen für das entsprechende lineare Ausgleichsproblem.

Geben Sie jeweils die Norm des Fehlers (Defekt) $\|b - Ax\|_2$ und die Näherungsfunktion $f(x)$ an. Vergleichen Sie y_i mit $f(x_i)$.