TU Chemnitz 5. Februar 2014
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

7. Übungsblatt

Aufgabe 27:

Entscheidend für die Rückwärtsstabilität der Gauß-Elimination ist, dass die Größe der Einträge der Dreiecksfaktoren L und R beschränkt bleibt. Spaltenpivotsuche gewährleistet $|\ell_{i,j}| \leq 1$ für die Einträge von L. Um das Wachstum der Einträge von R zu beschreiben, wurde der Begriff des *Wachstumsfaktors*

$$g = \frac{\max_{i,j} |r_{i,j}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|}$$

eingeführt.

a) Zeigen Sie: Wird Spaltenpivotsuche bei der Gauß-Elimination verwendet, so gilt $g \leq 2^{n-1}$.

b) Zeigen Sie, dass diese Schranke erreicht wird für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & & \\ -1 & \dots & & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 28:

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man zeige, daß durch $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{x}$ genau dann ein Innenprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.

(b) Es sei $A + iB$ eine Hermitesche positiv definite Matrix mit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man zeige, daß

$$C := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

symmetrisch und positiv definit ist.

Aufgabe 29:

Es sei $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige:

a) Es gilt $a_{ii} > 0$ sowie $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max a_{ii} > 0$.

b) Es gilt
$$a_{i,j}^2 < a_{i,i}a_{j,j} \text{ für alle } i \neq j \ .$$

Aufgabe 30:

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, welches die Cholesky-Zerlegung einer hermitesch-positiven Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ berechnet. Bestimmen Sie die Laufzeiten für hermitesche positiv-definite Zufallsmatrizen verschiedener Dimensionen und vergleichen Sie diese mit der Ihres Gauß-Eliminations-Programms.