**TU Chemnitz**
**Professur Numerische Mathematik**
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

# Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

6. Übungsblatt

## Aufgabe 23:

(a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, welches den Schätzer aus der vorhergehenden Aufgabe für $\|B\|_1$ mit $B = A^{-1}$ implementiert. Bei jeder Auswertung von $A^{-1}\boldsymbol{x}$ ist hier eine (nur einmal zu bestimmende) LR-Zerlegung von $A$ zu verwenden.

(b) Aus den Überlegungen der letzen Aufgabe ergeben sich unter Verwendung der Maximumnorm folgende praktische Fehlerschranken:

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty} \le \|A^{-1}\|_\infty \frac{\|\boldsymbol{r}\|_\infty}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty}, \quad \text{sowie} \quad \frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty} \le \frac{\|\, |A^{-1}|\, |\boldsymbol{r}|\, \|_\infty}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty}.$$

Eine Schätzung von $\|A^{-1}\|_\infty$ kann durch Anwendung des Hager-Algorithmus auf $B = A^{-T}$ gewonnen werden. Dies gilt auch für $\|\, |A^{-1}|\, |\boldsymbol{r}|\, \|_\infty$, wie man folgendermaßen sieht: Besitzt die Matrix $X$ nur nichtnegative Einträge, so gilt $\|X\|_\infty = \|X\boldsymbol{e}\|_\infty$, wobei $\boldsymbol{e} = [1, \ldots, 1]^T$. Damit gilt auch

$$\|\, |A^{-1}|\, |A|\, \|_\infty = \|\, |A^{-1}|\, |A|\boldsymbol{e}\, \|_\infty = \|\, |A^{-1}|\boldsymbol{g}\|_\infty, \quad \text{mit } \boldsymbol{g} := |A|\boldsymbol{e}.$$

Zur Schätzung von $\|\, |A^{-1}|\boldsymbol{g}\|_\infty$ sei $G$ die Diagonalmatrix diag$(g_1, \ldots, g_n)$, so dass $\boldsymbol{g} = G\boldsymbol{e}$. Daher ist

$$\|\, |A^{-1}|\boldsymbol{g}\|_\infty = \|\, |A^{-1}|G\boldsymbol{e}\|_\infty = \|\, |A^{-1}|G\|_\infty = \|\, |A^{-1}G|\, \|_\infty = \|A^{-1}G\|_\infty.$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $\|Y\|_\infty = \|\, |Y|\, \|_\infty$ für jede Matrix $Y$. Es genügt also, die Maximumnorm der Matrix $A^{-1}G$ zu schätzen, was durch Anwenden des Hager-Algorithmus auf die Matrix $(A^{-1}G)^T = GA^{-T}$ möglich ist. Die dabei erforderliche Multiplikation mit $A^{-1}$ und $A^{-T}$ geschieht wie gehabt mit Hilfe der LR-Zerlegung von $A$, Multiplikation mit der Diagonalmatrix $G$ ist trivial.

(c) Benutzen Sie MATLAB, um die Fehlerschätzer ($\star\star$) mit Hilfe des Hager-Algorithmus für folgende Testprobleme auszuwerten. Die Matrix ist gegeben durch $A = DB$, wobei `B = eye(n) + randn(n)*1e-7`, $D =$ diag$(1, c, c^2, \ldots, c^{n-1})$, mit $c = 10^{14/(n-1)}$ und $n = 5, 6, ..., 100$. Die Lösung $\boldsymbol{x}$ sei durch Zufallsvektoren gegeben. Vergleichen Sie die Fehlerschranken für Spaltenpivotsuche und Gesamtpivotsuche. Tragen Sie die Ergebnisse in einen Koordinatensystem ein, in welchem nach rechts jeweils der wahre Fehler und nach oben der zugehörige geschätzte Fehler abgetragen wird. Die Achsen sind hierbei am besten logarithmisch zu wählen.

**Aufgabe 24:**

Neben Schranken für die Norm des Rückwärtsfehlers $\Delta A, \Delta \boldsymbol{b}$ beim Lösen eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kann man oft auch von *relativen komponentenweisen Schranken* der Form

$$|\Delta A| \leq \epsilon |A|, \quad \text{bzw. } |\Delta \boldsymbol{b}| \leq \epsilon |\boldsymbol{b}|$$

ausgehen, wobei $\epsilon$ eine kleine positive Zahl bezeichne.

(a) Leiten Sie unter dieser Voraussetzung die komponentenweise Abschätzung

$$|\Delta \boldsymbol{x}| \leq \epsilon \left( |A^{-1}|(|A|\,|\hat{\boldsymbol{x}}| + |\boldsymbol{b}|) \right)$$

für die Störung $\Delta \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ her. Folgern Sie, dass für jede Vektornorm mit $\|\,|\boldsymbol{z}|\,\| = \|\boldsymbol{z}\|$ gilt

$$\|\Delta \boldsymbol{x}\| \leq \epsilon \|\,|A^{-1}|\,(|A|\,|\hat{\boldsymbol{x}}| + |\boldsymbol{b}|)\|.$$

Ist zusätzlich $\Delta \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, so folgt hieraus

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{x}\|}{\|\hat{\boldsymbol{x}}\|} \leq \epsilon \|\,|A^{-1}|\,|A|\,\|.$$

Man bezeichnet daher die Zahl $\kappa_{\mathrm{cr}}(A) := \|\,|A^{-1}|\,|A|\,\|$ als *komponentenweise relative Konditionszahl* oder auch *relative Konditionszahl* von $A$.

(b) Ist $D$ eine beliebige nichtsinguläre Diagonalmatrix und $B$ beliebig und nichtsingulär, dann ist $\kappa_{\mathrm{cr}}(DB) = \kappa_{\mathrm{cr}}(B)$.

(c) Zeigen Sie, dass mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}$ folgende Schranke gilt

$$\|\Delta \boldsymbol{x}\| \leq \|\,|A^{-1}|\,|\boldsymbol{r}|\,\|.$$

Diese Schranke ist oft viel kleiner als das Produkt $\|A^{-1}\|\,\|\boldsymbol{r}\|$.

**Aufgabe 25:**

Sei

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

mit $A_{1,1} \in \mathbb{C}^{k \times k}$. Dann heißt die Matrix $S := A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}$ das *Schur-Komplement von* $A_{1,1}$ *bezüglich* $A$. Man zeige: Nach $k$ Schritten von Gauß–Elimination ist $A_{2,2}$ durch $S$ überschrieben.

**Aufgabe 26:**

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind die Gerschgorin-Kreise $D_i$ definiert durch

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \right\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Der Satz von Gerschgorin besagt, dass die Eigenwerte von $A$ in $D := \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ liegen. Man zeige folgende Verschärfung:

Ist $\tilde{D}$ die Vereinigung von $m$ Gerschgorin-Kreisen, welche von den übrigen Kreisen disjunkt ist, so enthält $\tilde{D}$ genau $m$ Eigenwerte von $A$.

(Beachte: Die Eigenwerte werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.)