

Numerische Mathematik
Sommersemester 2013

4. Übungsblatt

Aufgabe 16:

Beweisen Sie mit Hilfe der Jordanschen Normalform:

- (a) Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine (von einer Vektornorm induzierte) Matrixnorm $\|\cdot\|$ (die von A und ϵ abhängt), für die gilt:

$$\|A\| - \epsilon \leq \rho(A) \leq \|A\|.$$

- (b) Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ mit $\|A\| = \rho(A)$.

Dabei bezeichne $\rho(A)$ den Spektralradius von A .

Aufgabe 17:

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Konditionszahl:

- (a) Für zwei Matrixnormen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ existieren stets Konstanten $c, C > 0$, so dass

$$c \operatorname{cond}_\alpha(A) \leq \operatorname{cond}_\beta(A) \leq C \operatorname{cond}_\alpha(A) \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- (b) Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\operatorname{cond}(A) \geq 1 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Aufgabe 18:

- (a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch und positiv definite Matrix, so gilt

$$\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

- (b) Ist $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine unitäre Matrix, so gilt $\operatorname{cond}_2(U) = 1$ und

$$\operatorname{cond}_2(UA) = \operatorname{cond}_2(AU) = \operatorname{cond}_2(A) \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass $\|Ux\|_2 = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$ gilt.

- (c) Es gilt: $\operatorname{cond}_2(A^H A) = [\operatorname{cond}_2(A)]^2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.