TU Chemnitz
Professur Numerische Mathematik
Prof. Dr. Oliver Ernst
Dipl.-Math. Ingolf Busch
Dipl.-Math. techn. Tommy Etling

5. Februar 2014

Numerische Mathematik

Sommersemester 2013

2. Übungsblatt

Aufgabe 6:

(a) Was ist das Ergebnis des arithmetischen Ausdrucks

```
u = abs( (4.0/3 - 1)*3 - 1 )
```

in MATLAB und warum?

(b) In den 50er Jahren war bei Division durch Null in Gleitpunktsystemen die Konvention verbreitet, anstelle eines Symbols ∞ als Ergebnis $N_{\max}$ zu liefern. Inwiefern wäre dies bei der Auswertung des Ausdrucks $(1/0)/10000000$ problematisch ? Was liefert IEEE-Arithmetik in diesem Fall ?

Aufgabe 7:

Es sei

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Bekanntlich ist $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.

a) Zeigen Sie

$$|e - x_n| = \mathcal{O}(n^{-1}) \text{ für } n \to \infty.$$

b) Berechnen Sie mit Matlab den Fehler $|e - x_n|$ für $n = 10^m$, $m = 0, 1, \ldots, 18$, und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 8:

Wir betrachten die Folge

$$I_n = \int_0^1 x^n\, e^x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(a) Beweisen Sie, dass $0 < I_{n+1} < I_n < e/(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass I_n der folgenden Rekursionsformel genügt:

$$I_0 = e - 1,\ I_n = e - nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

(c) Wertet man diese Rekursionsformel für $n = 0, 1, \ldots, 19$ auf einem Rechner mit Maschinengenauigkeit $\texttt{eps} = 2^{-52}$ aus, so erhält man das (unsinnige) Ergebnis $I_{19} = -13.2742$. Erklären Sie dieses Resultat (der alleinige Hinweis auf Rundungsfehler ist keine akzeptable Antwort).

(d) Berechnet man $\tilde{I}_{19}$ (auf dem gleichen Rechner) durch

$$\tilde{I}_{40} = 0,\ \tilde{I}_{n-1} = \frac{1}{n}\,e - \frac{1}{n}\tilde{I}_n \quad (n = 40, 39, \ldots, 20),$$

so ergibt sich $\tilde{I}_{19} = 0.1297$. Schätzen Sie $|I_{19} - \tilde{I}_{19}|$ ab.

Aufgabe 9:

Gegeben sei die quadratische Gleichung $x^2 - bx + c = 0$ mit den beiden Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

a) In welchen Fällen kann diese Lösungformel bei Auswertung in Gleitpunktarithmetik zu ungenauen Lösungen führen?

b) Geben Sie für diese Fälle eine numerisch stabilere Formel an.

c) Gleitpunktarithmetik im IEEE-Format *Single* läßt sich in MATLABdadurch simulieren, dass man Variablen explizit als `single`-Variable erklärt. Diese werden dann im Speicher im IEEE Single Format abgelegt, also mit 32 anstelle von 64 Bits.

   Werten sie für $b = 3.6678$ und $c = 2.0798 \cdot 10^{-3}$ mit IEEE single-Genauigkeit obige Lösungsformel sowie Ihre stabilere Formel aus. Tabellieren Sie dabei alle Zwischenergebnisse und erklären Sie ihre Beobachtungen.

   Hinweis: Man beachte, dass die CPU nach wie vor die Arithmetik doppelt genau durchführt, zur Simulation von Single-Arithmetik also Zwischenergebnisse zwischenspeichern!.

Aufgabe 10:

Die folgende Aufgabe soll zeigen, dass Rundungsfehler nicht zufällig sind. Werten Sie (mit Matlab) die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{622 - x(751 - x(324 - x(59 - 4x)))}{112 - x(151 - x(72 - x(14 - x)))}$$

in der angegebenen Klammerung (*Horner-Schema*) aus für

$$x = x_k = 1.606 + (k-1)2^{-52}, \quad k = 1, 2, \ldots, 361$$

(das sind 361 aufeinander folgende Maschinenzahlen) und stellen Sie Ihre Ergebnisse graphisch dar. Die Funktion r ist im fraglichen Bereich (nahezu) konstant mit

$$r(x_k) \in [8.7523765807784881\ldots, 8.7523765807784891\ldots]$$

(wurde mit einer Genauigkeit von 50 Dezimalstellen bestimmt).
Hinweis: Plotten Sie $k - 1$ gegen $10^{12}(r(x_k) - 8.752376580778)$, um die Unterschiede sichtbar zu machen.